M.L. KRASNOV

FONCTIONS D'UNE VARIABLE COMPLEXE CALCUL OPÉRATIONNEL THÉORIE DE LA STABILITÉ

M. KRASNOV, A. KISSÉLEV,
G. MAKARENKO

FONCTIONS D'UNE VARIABLE COMPLEXE

CALCUL OPÉRATIONNEL

THÉORIE DE LA STABILITÉ

ÉDITIONS MIR · MOSCOU

AVANT-PROPOS

Le présent livre contient un recueil assez vaste de problèmes concernant trois divisions importantes des mathématiques pures et appliquées: les fonctions d'une variable complexe, le calcul opérationnel et la théorie de la stabilité.

L'ouvrage inclut des brefs exposés théoriques, des exemples types de complexité variée analysés en détail, de même que des problèmes (plus d'un millier) destinés à être résolus par le lecteur. Presque tous les problèmes sont munis de réponses. Si c'est le cas, les problèmes proposés sont dotés d'indications nécessaires à leur résolution.

De cette façon, l'ouvrage offert au lecteur peut lui servir de mémento mathématique, pouvant en même temps l'aider dans l'étude individuelle des divisions susmentionnées.

Les auteurs

CHAPITRE PREMIER

FONCTIONS D'UNE VARIABLE COMPLEXE

§ 1. Nombres complexes : définitions et opérations

On appelle *nombre complexe* z une expression de la forme

$$z = x + iy$$

(c'est la forme algébrique d'un nombre complexe), où x et y sont des nombres réels quelconques, i étant le symbole de l'unité imaginaire qui vérifie la relation $i^2 = -1$. Les nombres x et y sont respectivement appelés *partie réelle* et *partie imaginaire du nombre complexe* z et se notent

$$x = \operatorname{Re} z, \qquad y = \operatorname{Im} z.$$

Le nombre complexe $\bar{z} = x - iy$ est dit *conjugué* du nombre complexe $z = x + iy$.

On considère que deux nombres complexes $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$ sont égaux si, et seulement si, $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

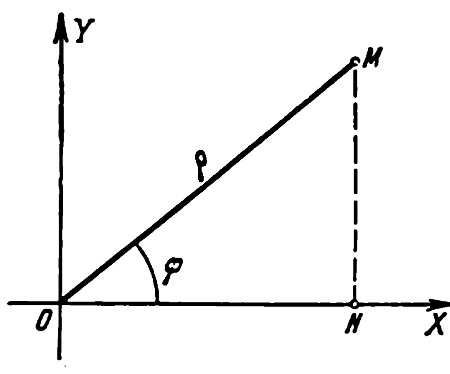


Fig. 1.

Un nombre complexe $z = x + iy$ est représenté dans le plan XOY par un point M de coordonnées (x, y) ou bien par un vecteur qui a pour origine le point O (0, 0), son extrémité se situant au point M (x, y) (fig. 1). La longueur ρ du vecteur $\overline{OM}$ est appelée *module* du nombre complexe et se note $|z|$ de façon que $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. L'angle φ que fait le vecteur $\overline{OM}$ avec l'axe OX est appelé *argument* du nombre complexe z et est désigné par $\varphi = \arg z$; l'argument d'un nombre complexe ne se définit pas d'une façon univoque mais à l'addition près d'un multiple entier de 2π :

$$\arg z = \operatorname{Arg} z + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

où $\operatorname{Arg} z$ est la détermination principale de $\arg z$ définie par les conditions

$$-\pi < \operatorname{Arg} z \leqslant \pi,$$

de plus

$$\operatorname{Arg} z = \begin{cases} \operatorname{Arctg} \dfrac{y}{x}, & \text{si} \quad x > 0, \\ \pi + \operatorname{Arctg} \dfrac{y}{x}, & \text{si} \quad x < 0, \quad y \geqslant 0, \\ -\pi + \operatorname{Arctg} \dfrac{y}{x}, & \text{si} \quad x < 0, \quad y < 0, \\ \pi/2, & \text{si} \quad x = 0, \quad y > 0, \\ -\pi/2, & \text{si} \quad x = 0, \quad y < 0. \end{cases} \tag{1}$$

Les relations suivantes sont valables:

$$\operatorname{tg}(\arg z)=\frac{y}{x}, \qquad \sin(\arg z)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \cos(\arg z)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Deux nombres complexes z_1 et z_2 sont égaux si, et seulement si, ils ont les mêmes modules, alors que leurs arguments sont égaux ou bien différents d'un multiple de 2π:

$$|z_1| = |z_2|, \qquad \arg z_1 = \arg z_2 + 2\pi n \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Soient $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$ deux nombres complexes.

1. On appelle *somme* $z_1 + z_2$ des nombres complexes z_1 et z_2 le nombre complexe

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2).$$

2. On appelle *différence* $z_1 - z_2$ des nombres complexes z_1 et z_2 le nombre complexe

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i\,(y_1 - y_2).$$

3. On appelle *produit* z_1z_2 des nombres complexes z_1 et z_2 le nombre complexe

$$z_1z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i\,(x_1y_2 + x_2y_1).$$

De la définition du produit des nombres complexes il vient, en particulier,

$$z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

4. On appelle *quotient* $\frac{z_1}{z_2}$ de la division du nombre complexe z_1 par le nombre complexe $z_2 \neq 0$ un nombre complexe z tel que l'équation $zz_2 = z_1$ soit vérifiée. Pour le quotient, la formule ci-dessous est valable

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\bar{z}_2}{|z_2|^2}. \tag{2}$$

Dans ce cas, on a utilisé la formule $z_2^{-1}=\frac{\bar{z}_2}{|z_2|^2}$.

La formule (2) peut être mise sous la forme

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}.$$

La partie réelle $\operatorname{Re} z$ et celle imaginaire $\operatorname{Im} z$ du nombre complexe z sont exprimées à l'aide des nombres complexes conjugués correspondants de la façon suivante:

$$\operatorname{Re} z=\frac{z+\bar{z}}{2} \qquad \operatorname{Im} z=i\,\frac{\bar{z}-z}{2}=\frac{z-\bar{z}}{2i}.$$

EXEMPLE 1. Montrer que $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$.

DÉMONSTRATION. Par définition, on a

$$\overline{z_1 + z_2} = (x_1 + x_2) - i\,(y_1 + y_2) = (x_1 - iy_1) + (x_2 - iy_2) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2.$$

1. Montrer que:

a) $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$; b) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$; c) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$;

d) $\overline{\bar{z}_1 + \bar{z}_2} = z_1 + z_2$.

EXEMPLE 2. **Trouver les solutions réelles de l'équation**

$$(4 + 2i)\, x + (5 - 3i)\, y = 13 + i.$$

SOLUTION. **En séparant les parties réelle et imaginaire dans le premier membre, on obtient $(4x + 5y) + i\,(2x - 3y) = 13 + i$, d'où l'on tire, conformément à la définition de l'égalité des deux nombres complexes,**

$$\begin{cases} 4x + 5y = 13, \\ 2x - 3y = 1. \end{cases}$$

On résout le système obtenu et l'on a

$$x = 2, \qquad y = 1.$$

Trouver les solutions réelles des équations suivantes:

2. $(3x - i)(2 + i) + (x - iy)(1 + 2i) = 5 + 6i$.

3. $(x - iy)(a - ib) = i^5$, où a, b sont des nombres réels donnés ($|a| \neq |b|$).

4. $\frac{1}{z - i} + \frac{2 + i}{1 + i} = \sqrt{2}$, où $z = x + iy$.

5. Mettre le nombre complexe $\frac{1}{(a + ib)^2} + \frac{1}{(a - ib)^2}$ sous forme algébrique.

6. Montrer que $\frac{\sqrt{1 + x^2} + ix}{x - i\sqrt{1 + x^2}} = i$ (x est un nombre réel).

7. Exprimer x et y par u et v si l'on a $\frac{1}{x + iy} + \frac{1}{u + iv} = 1$ (x, y, u, v sont des nombres réels).

8. Trouver tous les nombres complexes qui satisfont à la condition $\bar{z} = z^2$.

EXEMPLE 3. **Trouver le module et l'argument du nombre complexe**

$$z = -\sin\frac{\pi}{8} - i\cos\frac{\pi}{8}.$$

SOLUTION. **On a**

$$x = -\sin\frac{\pi}{8} < 0, \qquad y = -\cos\frac{\pi}{8} < 0.$$

D'après (1), l'argument principal sera

$$\operatorname{Arg} z = -\pi + \operatorname{Arctg}\left(\operatorname{cotg}\frac{\pi}{8}\right) = -\pi + \operatorname{Arctg}\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right)\right] =$$

$$= -\pi + \operatorname{Arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{3}{8}\pi\right) = -\pi + \frac{3}{8}\pi = -\frac{5}{8}\pi.$$

Par conséquent,

$$\arg z = -\frac{5}{8}\pi + 2k\pi \quad (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots),$$

$$|z| = \sqrt{\sin^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{\pi}{8}} = 1.$$

9. Trouver les modules et l'argument principal des nombres complexes suivants:

a) $z = 4 + 3i$; b) $z = -2 + 2\sqrt{3}i$; c) $z = -7 - i$;

d) $z = -\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}$; e) $z = 4 - 3i$;

f) $z = \cos\alpha - i\sin\alpha \quad (\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi)$.

Tout nombre complexe $z = x + iy$ $(z \neq 0)$ peut être présenté sous forme trigonométrique

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi), \qquad \text{où} \qquad \rho = |z|, \quad \varphi = \arg z.$$

EXEMPLE 4. Mettre sous forme trigonométrique le nombre complexe

$$z = -1 - i\sqrt{3}.$$

SOLUTION. On a

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2; \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}, \qquad \varphi = -\frac{2}{3}\pi.$$

Par conséquent,

$$-1 - i\sqrt{3} = 2\left[\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right].$$

EXEMPLE 5. Trouver les racines réelles de l'équation

$$\cos x + i\sin x = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}i.$$

SOLUTION. La présente équation n'a pas de racines. En effet, cette équation équivaut aux équations: $\cos x = 1/2$, $\sin x = 3/4$. Ces deux équations sont incompatibles, car $\cos^2 x + \sin^2 x = 13/16$ n'est pas possible pour n'importe quelles valeurs de x.

Tout nombre complexe $z \neq 0$ peut être présenté sous forme exponentielle

$$z = \rho e^{i\varphi}, \qquad \text{où} \qquad \rho = |z|, \quad \varphi = \arg z.$$

EXEMPLE 6. Trouver tous les nombres complexes $z \neq 0$ vérifiant la condition $z^{n-1} = \bar{z}$.

SOLUTION. Soit $z = \rho e^{i\varphi}$. Alors $\bar{z} = \rho e^{-i\varphi}$.

En vertu de la condition imposée,

$$\rho^{n-1}e^{(n-1)\varphi} = \rho e^{-i\varphi} \qquad \text{ou} \qquad \rho^{n-2}e^{in\varphi} = 1,$$

d'où $\rho^{n-2} = 1$, c'est-à-dire $\rho = 1$, et $in\varphi = 2k\pi i$, ainsi que $\varphi = \frac{2k\pi}{n}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$. Donc,

$$z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

10. Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants:

a) -2; b) $2i$; c) $-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$;

d) $1-\sin\alpha+i\cos\alpha\ \left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$;

e) $\frac{1+\cos\alpha+i\sin\alpha}{1+\cos\alpha-i\sin\alpha}\ \left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$;

et sous forme exponentielle:

f) -2; g) i; h) $-i$; i) $-1-i\sqrt{3}$;

j) $\sin\alpha-i\cos\alpha\ \left(\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi\right)$; k) $5+3i$.

Soient deux nombres complexes présentés sous forme trigonométrique: $z_1=\rho_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$, $z_2=\rho_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$.
Le produit de ces nombres est donné par la formule

$$z_1z_2=\rho_1\rho_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)],$$

ce qui signifie que, pour multiplier les nombres complexes, on multiplie entre eux leurs modules et l'on additionne leurs arguments:

$$|z_1z_2|=|z_1|\,|z_2|,\qquad \arg(z_1z_2)=\arg z_1+\arg z_2.$$

Le quotient de deux nombres complexes z_1 et $z_2\neq 0$ est trouvé par la formule

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)],$$

c'est-à-dire

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|},\qquad \arg\frac{z_1}{z_2}=\arg z_1-\arg z_2.$$

L'élévation à une puissance représentée par un nombre naturel n d'un nombre complexe

$$z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

se fait d'après la formule

$$z^n=\rho^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi),$$

c'est-à-dire

$$|z^n|=|z|^n,\qquad \arg z^n=n\arg z+2\pi k\quad (k=0,\ \pm 1,\ \ldots).$$

D'ici l'on obtient la formule de Moivre

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi.$$

PROPRIÉTÉS DU MODULE DES NOMBRES COMPLEXES

1. $|\bar{z}|=|z|$; 2. $z\bar{z}=|z|^2$; 3. $|z_1z_2|=|z_1|\,|z_2|$; 4. $|z^n|=|z|^n$;

5. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$, $z_2\neq 0$; 6. $|\operatorname{Re} z|\leqslant|z|$, $|\operatorname{Im} z|\leqslant|z|$;

7. $|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$; 8. $||z_1|-|z_2||\leqslant|z_1-z_2|$.

EXEMPLE 7. Calculer $(-1+i\sqrt{3})^{60}$.

SOLUTION. Mettons le nombre $z=-1+i\sqrt{3}$ sous forme trigonométrique

$$-1+i\sqrt{3}=2\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right).$$

En appliquant la formule d'élévation à une puissance donnée ci-avant, on obtient

$$(-1+i\sqrt{3})^{60}=2^{60}\left[\cos\left(60\cdot\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(60\cdot\frac{2}{3}\pi\right)\right]=$$

$$=2^{60}(\cos 40\pi+i\sin 40\pi)=2^{60}.$$

EXEMPLE 8. Montrer que le polynôme

$$f(x)=(\cos\alpha+x\sin\alpha)^n-\cos n\alpha-x\sin n\alpha$$

est divisible par x^2+1.

SOLUTION. On a $x^2+1=(x+i)(x-i)$. D'après la formule de Moivre,

$$f(i)=(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n-\cos n\alpha-i\sin n\alpha=$$

$$=\cos n\alpha+i\sin n\alpha-\cos n\alpha-i\sin n\alpha=0.$$

D'une façon analogue, $f(-i)=0$. Cela signifie que $f(x)$ est divisible par x^2+1.

11. Montrer que le polynôme

$$f(x)=x^n\sin\alpha-\lambda^{n-1}x\sin n\alpha+\lambda^n\sin(n-1)\alpha$$

est divisible par $x^2-2\lambda x\cos\alpha+\lambda^2$.

12. Calculer

a) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{40}$; b) $(2-2i)^7$; c) $(\sqrt{3}-3i)^6$; d) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^8$.

13. Montrer que

$$\left(\frac{1+i\operatorname{tg}\alpha}{1-i\operatorname{tg}\alpha}\right)^n=\frac{1+i\operatorname{tg}n\alpha}{1-i\operatorname{tg}n\alpha}.$$

14. Montrer que, si

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n=1,\quad \text{alors}\quad (\cos\alpha-i\sin\alpha)^n=1.$$

15. En appliquant la formule de Moivre, exprimer par les puissances de $\sin\varphi$ et de $\cos\varphi$ les fonctions d'angles multiples suivantes:

a) $\sin 3\varphi$; b) $\cos 3\varphi$; c) $\sin 4\varphi$; d) $\cos 4\varphi$; e) $\sin 5\varphi$; f) $\cos 5\varphi$.

La racine n-ième d'un nombre complexe z possède n valeurs distinctes données par la formule

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right),$$

où $k=0, 1, 2, \ldots, n-1$, $\varphi=\operatorname{Arg} z$.

Les points correspondant aux valeurs de $\sqrt[n]{z}$ constituent les sommets d'un n-gone inscrit dans un cercle de rayon $R = \sqrt[n]{|z|}$ centré sur l'origine des coordonnées.

La racine n-ième d'un nombre réel a possède également n valeurs parmi lesquelles on aura deux, une ou aucune valeur réelle en fonction de la parité ou de l'imparité du nombre n et du signe de a.

EXEMPLE 9. Trouver toutes les valeurs de $\sqrt[4]{1-i}$.

SOLUTION. On met le nombre complexe $1 - i$ sous forme trigonométrique

$$1-i=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right].$$

Par conséquent,

$$\sqrt[4]{1-i}=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}+i\sin\frac{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}\right).$$

En posant $k = 0, 1, 2, 3$, on trouve

$$(k=0)\qquad \sqrt[4]{1-i}=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16}-i\sin\frac{\pi}{16}\right),$$

$$(k=1)\qquad \sqrt[4]{1-i}=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{7}{16}\pi+i\sin\frac{7}{16}\pi\right),$$

$$(k=2)\qquad \sqrt[4]{1-i}=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{15}{16}\pi+i\sin\frac{15}{16}\pi\right),$$

$$(k=3)\qquad \sqrt[4]{1-i}=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{23}{16}\pi+i\sin\frac{23}{16}\pi\right).$$

Trouver toutes les valeurs des racines suivantes:

16. a) $\sqrt[4]{-1}$; b) $\sqrt{i}$; c) $\sqrt[3]{i}$; d) $\sqrt[4]{-i}$.

17. a) $\sqrt[4]{1}$; b) $\sqrt[3]{-1+i}$; c) $\sqrt{2-2\sqrt{3}i}$.

18. $\sqrt[5]{\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right)}$.

EXEMPLE 10. Quel est l'ensemble des points du plan complexe des z défini par la relation

$$\operatorname{Im} z^2 > 2?$$

SOLUTION. Soit $z = x + iy$. Alors

$$z^2 = (x+iy)^2 = (x^2 - y^2) + i2xy.$$

Par conséquent, $\operatorname{Im} z^2 = 2xy$.

Conformément à la condition imposée, $2xy > 2$ ou $xy > 1$. Cette inégalité définit l'ensemble des points du premier et du troisième quadrants qui se trouvent respectivement au-dessus et au-dessous de l'hyperbole $xy = 1$.

EXEMPLE 11. Quel est l'ensemble des points du plan complexe des z

défini par la condition

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \operatorname{Arg}(z+1-i) \leqslant \frac{3}{4}\pi ?$$

SOLUTION. Le nombre complexe

$$z+1-i = z-(-1+i)$$

est représenté par un vecteur dont l'origine se situe au point $-1+i$ et qui a comme extrémité le point z. L'angle que fait ce vecteur avec l'axe OX sera $\operatorname{Arg}(z+1-i)$; il varie de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{3}{4}\pi$. Il s'ensuit que l'inegalité donnée définit l'angle compris entre deux demi-droites sortant du point $-1+i$ et qui forment avec l'axe OX les angles de $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3}{4}\pi$ radians (fig. 2).

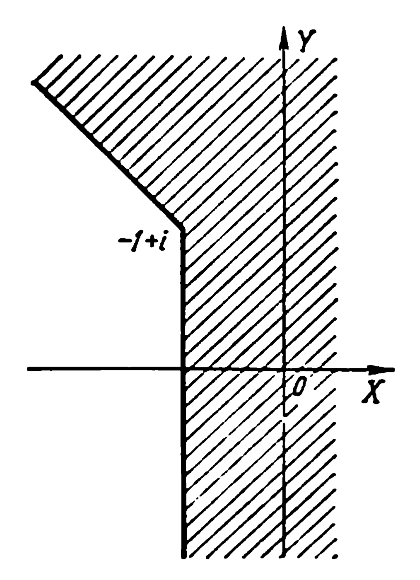


Fig. 2.

EXEMPLE 12. Quel est le domaine défini par la condition $|z| + \operatorname{Re} z < 1$?

SOLUTION. Soit $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Alors $|z| = \rho$, $\operatorname{Re} z = \rho\cos\varphi$. D'après la condition imposée, $\rho + \rho\cos\varphi < 1$, d'où

$$\rho < \frac{1}{1+\cos\varphi}.$$

Cette condition est vérifiée par tous les points disposés dans le domaine borné par la courbe

$$\rho = \frac{1}{1+\cos\varphi}$$

(c'est l'équation d'une parabole en coordonnées polaires).

Trouver les ensembles des points du plan des z définis par les conditions indiquées:

19. a) $|z| \geqslant 2$; b) $\frac{1}{|z|} \geqslant 1$, $z \neq 0$; c) $\left|\frac{1}{z}\right| \leqslant 2$, $z \neq 0$.

20. a) $|z-5i| = 8$; b) $|z-1-i| \leqslant 4$.

21. a) $1 < |z+i| < 2$, $\frac{\pi}{4} < \operatorname{Arg} z < \frac{\pi}{2}$;

b) $2 < |z| < 3$, $\frac{\pi}{8} < \operatorname{Arg} z < \frac{4}{3}\pi$.

22. a) $\left|\frac{z-1}{z+1}\right| \leqslant 1$; b) $0 \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant 1$.

23. a) $1 \leqslant |z+2+i| \leqslant 2$; b) $|z-1| < |z-i|$;

c) $1 < \operatorname{Re} z < 2$.

24. $|z-a| < |1-a\bar{z}|$ (a est un nombre réel $|a| < 1$).

25. a) $|z| > 2 + \operatorname{Im} z$; b) $|z| - \operatorname{Re} z \leqslant 0$.

26. $\operatorname{Im} \bar{z}^2 < 1$.

27. $4 \leqslant |z-1| + |z+1| \leqslant 8$.

28. a) $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) < -\frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{4} < \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) + \operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) < \frac{1}{2}$.

EXEMPLE 13. Quelle est la courbe d'équation $|z+c| + |z-c| = 2a$, où c et a sont des nombres réels positifs, de plus $a > c$?

SOLUTION. $|z+c|$ est la distance qui sépare les points z et $-c$; $|z-c|$ est la distance entre z et c. En vertu de la condition formulée, la somme des distances entre le point z et les deux points donnés $z_1 = -c$ et $z_2 = c$ reste invariable. Cela signifie que le point z se trouve sur une ellipse dont l'équation est de la forme

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{où} \quad b^2 = a^2 - c^2.$$

EXEMPLE 14. Quelle est la courbe définie par l'équation $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{4}$?

SOLUTION. Soit $z = x + iy$. On a

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}}}{2} = \frac{z + \bar{z}}{2z\bar{z}} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Conformément à la condition imposée,

$$\frac{x}{x^2+y^2} = \frac{1}{4} \quad \text{ou} \quad x^2 + y^2 - 4x = 0.$$

C'est une circonférence d'équation $(x-2)^2 + y^2 = 4$.

29. Quelle est la ligne déterminée par l'ensemble de tous les points $z = -2 + iy$ dans le cas où y prend n'importe quelle valeur réelle?

30. Quelle est la ligne déterminée par l'ensemble de tous les points $z = x + 2i$ dans le cas où x prend n'importe quelle valeur réelle?

Indiquer les lignes définies par les équations suivantes:

31. a) $\operatorname{Im} z^2 = 2$; b) $\operatorname{Re} \bar{z}^2 = 1$; c) $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2}$.

32. a) $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = 1$; b) $\operatorname{Im} \overline{(z^2 - \bar{z})} = 2 - \operatorname{Im} z$.

33. $z^2 + \bar{z}^2 = 1$. **34.** $2z\bar{z} + (2+i)z + (2-i)\bar{z} = 2$.

35. a) $|z-i| + |z+i| = 4$; b) $|z-i| - |z+i| = 2$.

36. a) $|z| - 3\operatorname{Im} z = 6$; b) $3|z| - \operatorname{Re} z = 12$.

37. a) $|z-2| = |1-2\bar{z}|$; b) $|z-z_1| = |z-z_2|$;
c) $\operatorname{Re}(z^2 - \bar{z}) = 0$; d) $\operatorname{Re}(1+z) = |z|$.

EXEMPLE 15. Mettre sous forme complexe l'équation de la droite

$$Ax + By + C = 0. \qquad (3)$$

SOLUTION. Soient $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$. Alors $x = \frac{\bar{z} + z}{2}$, $y = \frac{\bar{z} - z}{2} i$. En substituant les expressions de x et de y dans l'équation (3), on obtient

$$A(\bar{z} + z) + Bi(\bar{z} - z) + 2C = 0$$

ou

$$(A + iB)\bar{z} + (A - iB)z + 2C = 0. \qquad (4)$$

Introduisons la notation

$$A + iB = a.$$

Alors l'équation (4) deviendra

$$\bar{a}z + a\bar{z} + 2C = 0.$$

EXEMPLE 16. Mettre sous forme complexe l'équation de la circonférence

$$x^2 + y^2 + 2x + 2y = 0. \qquad (5)$$

SOLUTION. On a

$$x^2 + y^2 = |z|^2 = z\bar{z}, \qquad 2x = \bar{z} + z, \qquad 2y = i(\bar{z} - z).$$

En effectuant les substitutions correspondantes dans l'équation (5), on obtient

$$z\bar{z} + \bar{z} + z + i(\bar{z} - z) = 0 \qquad \text{ou} \qquad z\bar{z} + (1 - i)z + (1 + i)\bar{z} = 0.$$

EXEMPLE 17. Quelle est la ligne du plan XOY définie par l'équation

$$z\bar{z} + i(z - \bar{z}) - 2 = 0? \qquad (6)$$

SOLUTION. Soit $z = x + iy$.

On a $\bar{z} = x - iy$, $z\bar{z} = x^2 + y^2$.

L'équation (6) prend la forme

$$x^2 + y^2 - 2y - 2 = 0 \qquad \text{ou} \qquad x^2 + (y - 1)^2 = 3.$$

C'est une circonférence de rayon $R = \sqrt{3}$ centrée sur le point (0, 1).

Mettre sous forme complexe les équations des lignes suivantes:

38. a) Axes de coordonnées OX et OY ; b) droite $y = x$; c) droite $y = kx + b$, où k, b sont des nombres réels.

39. a) Hyperbole équilatérale $x^2 - y^2 = a^2$; b) circonférence $x^2 + y^2 + 2x = 0$.

PROBLÈMES DIVERS

Résoudre les équations:

40. $z^3 + 3z^3 + 3z + 3 = 0$.

41. $z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4z - 15 = 0$.

42. Trouver le nombre complexe z qui est représenté par le

point du segment z_1z_2 dont la distance au point z_2 est deux fois celle qui le sépare du point z_1.

43. Quelle sera l'image reflétée du vecteur $a + ib$ par rapport à la bissectrice du premier quadrant?

44. Quel sera le vecteur obtenu par rotation de 90° du vecteur $-\sqrt{3} + 3i$?

45. Quel sera le vecteur obtenu par rotation de 120° du vecteur $-\sqrt{3} - i$?

46. De quel angle faut-il tourner le vecteur $4 - 3i$ pour obtenir le vecteur $-\frac{5}{\sqrt{2}} + \frac{5}{\sqrt{2}}i$?

47. De quel angle faut-il tourner le vecteur $3\sqrt{2} + i2\sqrt{2}$ pour obtenir le vecteur $-5 + i$?

Résoudre les équations suivantes:

48. $(x + i)^n - (x - i)^n = 0$ (x est un nombre réel).

49. $\cos x + i \sin x = \sin x + i \cos x$.

50. Trouver le vecteur que l'on obtiendra en tournant de 45° et en doublant le vecteur $z = 3 + 4i$.

51. Trouver trois sommets inconnus d'un carré dont le centre se trouve au point $z_0 = 1 + i$, alors que son quatrième sommet se situe au point $z_1 = 1 - i$.

52. Soient $z_1, z_2, \ldots, z_n$ les racines de l'équation $z^n - 1 = 0$ $(n > 1)$.

Montrer que $z_1 + z_2 + \ldots + z_n = 0$.

Trouver les sommes suivantes:

53. a) $\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx$;
b) $\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx$.

54. a) $\sin x + \sin 3x + \ldots + \sin (2n - 1) x$;
b) $\cos x + \cos 3x + \ldots + \cos (2n - 1) x$.

§ 2. Fonctions d'une variable complexe

On dit qu'une fonction $w = f(z)$ est définie dans un domaine D si à chaque point $z \in D$ on associe une (la fonction est alors uniforme) ou plusieurs (la fonction est multiforme) valeurs de w.

De cette façon, la fonction $w = f(z)$ réalise l'application des points du plan complexe des z sur les points correspondants du plan complexe des w.

Soient $z = x + iy$ et $w = u + iv$. Alors la dépendance $w = f(z)$ entre la fonction complexe w et la variable complexe z peut être décrite à l'aide de deux fonctions réelles u et v des variables réelles x et y

$$u = u(x, y), \qquad v = v(x, y).$$

EXEMPLE 1. Soit $w = z^3 - i\bar{z}$.

On pose $z = x + iy$, $w = u + iv$ et l'on obtient

$$u + iv = (x + iy)^3 - i(x - iy) = (x^3 - 3xy^2 - y) + i(3x^2y - y^3 - x).$$

Cela veut dire que l'égalité $w = z^3 - i\bar{z}$ équivaut aux deux égalités suivantes:

$$\begin{cases} u = x^3 - 3xy^2 - y, \\ v = 3x^2y - x - y^3. \end{cases}$$

Trouver les parties réelle et imaginaire des fonctions suivantes:

55. a) $w = \bar{z} - iz^2$; b) $w = z^2 + i$; c) $w = i - z^3$;

d) $w = \frac{1}{\bar{z}}$; e) $w = \frac{iz+1}{1+\bar{z}}$; f) $w = \frac{\bar{z}}{z}$.

Trouver les images des points donnés par les applications indiquées:

56. a) $z_0 = -i$; $w = z^2$; b) $z_0 = 1 - i$, $w = (z - i)^2$;

c) $z_0 = 1$, $w = \frac{1}{z - i}$; d) $z_0 = 2 + 3i$, $w = \frac{\bar{z}}{z}$.

Soit une courbe dans le plan des z donnée par l'équation $F(x, y) = 0$. Pour trouver l'équation de l'image $\Phi(u, v) = 0$ de cette courbe dans le plan des w par l'application $w = f(z) = u + iv$, il faut éliminer x et y entre les équations

$$\begin{cases} u = u(x, y), \\ v = v(x, y), \\ F(x, y) = 0. \end{cases}$$

Si la courbe est donnée par les équations paramétriques

$$\left.\begin{array}{l} x = x(t), \\ y = y(t) \end{array}\right\} \quad \text{ou} \quad z = z(t) = x(t) + iy(t),$$

alors les équations paramétriques de son image par l'application $w = f(z) = u + iv$ seront

$$\left.\begin{array}{l} u = u[x(t), y(t)] = U(t), \\ v = v[x(t), y(t)] = V(t). \end{array}\right\}$$

EXEMPLE 2. Sur quelle courbe sera appliqué le cercle unité $|z| = 1$ par $w = z^2$?

SOLUTION. Etant donné que $|z| = 1$, on a

$$|w| = |z|^2 = 1.$$

Ainsi, le cercle $|z| = 1$ disposé dans le plan des z a comme image le cercle $|w| = 1$ décrit deux fois dans le plan des w. Cela découle du fait que $w = z^2$ entraîne $\arg w = 2 \arg z + 2k\pi$; de cette façon, quand le point z décrit le cercle $|z| = 1$ entier, son image décrit deux fois le cercle $|w| = 1$.

EXEMPLE 3. Trouver l'image de la circonférence

$$z = R \cos t + iR \sin t \quad (0 \leqslant t < 2\pi)$$

par l'application $w = \frac{\bar{z}}{z}$.

SOLUTION. Soit $z = x + iy$. L'équation donnée de la circonférence peut se mettre sous la forme

$$x = R \cos t, \qquad y = R \sin t \qquad (0 \leqslant t < 2\pi).$$

Séparons les parties réelle et imaginaire de la fonction $w = u + iv$. On obtient

$$u+iv=\frac{z}{\bar{z}}=\frac{z^2}{z\bar{z}}=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+i\,\frac{2xy}{x^2+y^2}.$$

D'où

$$u=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2},\qquad v=\frac{2xy}{x^2+y^2}.$$

En substituant $x = R\cos t$ et $y = R\sin t$ dans u et v, on trouve les équations paramétriques de l'image de la circonférence

$$\begin{cases} u=\dfrac{\cos^2 t-\sin^2 t}{\cos^2 t+\sin^2 t}=\cos 2t, \\ v=\dfrac{2\cos t\sin t}{\cos^2 t+\sin^2 t}=\sin 2t, \end{cases} \qquad (*)$$

ou $u^2 + v^2 = 1$.

On voit que l'image est constituée par le cercle unité décrit deux fois en vertu de la relation $0 \leqslant t < 2\pi$ et des formules (*).

57. Trouver les lignes du plan des w sur lesquelles sont appliquées par la fonction $w = \frac{1}{z}$ les lignes suivantes du plan des z:

a) $|z| = \frac{1}{2}$; b) $\operatorname{Re} z = 0$; c) $\operatorname{Arg} z = \frac{3}{4}\pi$;

d) $\operatorname{Arg} z^2 = -\frac{\pi}{2}$; e) $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$; f) $|z| = z$.

58. Trouver les images des axes de coordonnées OX et OY par les applications suivantes:

a) $w = \frac{z+1}{z-1}$; b) $w = 1 + \frac{1}{z}$.

PRINCIPALES FONCTIONS ÉLÉMENTAIRES D'UNE VARIABLE COMPLEXE

1. *Fonction rationnelle*

$$w=\frac{a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0z^m+b_1z^{m-1}+\ldots+b_m}.$$

En particulier, le polynôme

$$w = a_0z^n + a_1z^{n-1} + \ldots + a_n$$

est une fonction rationnelle.

2. La *fonction exponentielle* e^z est définie en tant que somme de la série entière

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots$$

qui converge absolument dans tout le plan complexe.

La fonction exponentielle e^z jouit des propriétés suivantes:

a) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}\cdot e^{z_2}$, où z_1 et z_2 peuvent prendre n'importe quelle valeur complexe;

b) $e^{z+2k\pi i} = e^z$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), ce qui veut dire que e^z est une fonction périodique de période $2\pi i$.

3. Les *fonctions trigonométriques* $\sin z$ et $\cos z$ sont définies par les séries entières

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots,$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots,$$

qui convergent absolument pour toute valeur complexe de z. Les fonctions $\sin z$ et $\cos z$ sont des fonctions périodiques de période réelle 2π et ne possèdent que des zéros réels, respectivement $z = k\pi$ et $z = \pi/2 + k\pi$, où $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Pour les fonctions e^z, $\sin z$ et $\cos z$, les formules d'Euler

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \qquad e^{-iz} = \cos z - i \sin z, \tag{1}$$

sont valables, d'où

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \tag{2}$$

Les fonctions $\operatorname{tg} z$ et $\operatorname{cotg} z$ sont définies par les égalités

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \qquad \operatorname{cotg} z = \frac{\cos z}{\sin z}. \tag{3}$$

Toutes les formules trigonométriques conservent leur validité lorsqu'elles sont appliquées aux fonctions trigonométriques.

4. Les *fonctions hyperboliques* $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{th} z$, $\operatorname{coth} z$ sont définies par les égalités

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \qquad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \tag{4}$$

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \qquad \operatorname{coth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}. \tag{5}$$

5. Les fonctions trigonométriques et celles hyperboliques sont liées entre elles par les relations suivantes:

$$\begin{aligned} \sin z &= -i \operatorname{sh} iz, & \operatorname{sh} z &= -i \sin iz, \\ \cos z &= \operatorname{ch} iz, & \operatorname{ch} z &= \cos iz, \\ \operatorname{tg} z &= -i \operatorname{th} iz, & \operatorname{th} z &= -i \operatorname{tg} iz, \\ \operatorname{cotg} z &= i \operatorname{coth} iz, & \operatorname{coth} z &= i \operatorname{cotg} iz. \end{aligned}$$

6. La *fonction logarithmique* $\operatorname{Ln} z$, où $z \neq 0$, est définie comme étant la fonction réciproque de la fonction exponentielle, de plus

$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \arg z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z + 2k\pi i \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{6}$$

C'est une fonction multiforme. La détermination principale de $\operatorname{Ln} z$ est celle qui s'obtient pour $k = 0$ et qui est désignée par $\ln z$:

$$\ln z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z.$$

Il est évident que

$$\operatorname{Ln} z = \ln z + 2k\pi i, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Les relations suivantes sont valables:

$$\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2,$$

$$\operatorname{Ln}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\operatorname{Ln} z_1-\operatorname{Ln} z_2.$$

7. Les *fonctions trigonométriques réciproques* arcsin z, arccos z, arctg z, arccotg z sont définies respectivement comme fonctions réciproques des fonctions sin w, cos w, tg w, cotg w.

Par exemple, si $z = \sin w$, alors w est appelé arcsinus du nombre z et l'on écrit $w = \arcsin z$.

Toutes ces fonctions sont multiformes et exprimées par l'intermédiaire des fonctions logarithmiques comme suit:

$$\arcsin z=-i \operatorname{Ln}\left(iz+\sqrt{1-z^2}\right); \tag{7}$$

$$\arccos z=-i \operatorname{Ln}\left(z+\sqrt{z^2-1}\right); \tag{8}$$

$$\operatorname{arctg} z=-\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+iz}{1-iz}; \tag{9}$$

$$\operatorname{arccotg} z=-\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{z+i}{z-i}. \tag{10}$$

Les déterminations principales des fonctions trigonométriques réciproques Arcsin z, Arccos z, Arctg z, Arccotg z s'obtiennent si l'on prend les déterminations principales des fonctions logarithmiques correspondantes.

8. La *fonction puissance générale* $w = z^a$, où $a = \alpha + i\beta$ est un nombre complexe quelconque, est définie par l'égalité

$$z^a = e^{a \operatorname{Ln} z}.$$

Généralement parlant, c'est une fonction multiforme dont la détermination principale est

$$z^a = e^{a \ln z}.$$

9. La *fonction exponentielle générale* $w = a^z$ ($a \neq 0$ est un nombre complexe quelconque) est définie par l'égalité

$$a^z = e^{z \operatorname{Ln} a}.$$

La détermination principale de cette fonction multiforme sera $a^z = e^{z \ln a}$.

Séparer les parties réelle et imaginaire des fonctions suivantes:

59. a) $w = 2z - 1$; b) $w = z + z^2$; c) $w = z^{-1}$.

60. a) $w = e^{-z}$; b) $w = e^{\bar{z}^2}$; c) $w = \sin z$; d) $w = \operatorname{ch}(z - i)$.

61. a) $w = 2^{z^2}$; b) $w = \operatorname{sh} z$; c) $w = \operatorname{tg} z$.

EXEMPLE 4. Trouver la valeur du module de la fonction $w = \sin z$ au point

$$z = \pi + i \ln(2 + \sqrt{5}).$$

SOLUTION. Soit $z = x + iy$. Alors

$$w = \sin x \operatorname{ch} y + i \operatorname{sh} y \cos x.$$

Le module de la fonction sin z sera

$$|\sin z| = \sqrt{\sin^2 x \operatorname{ch}^2 y + \operatorname{sh}^2 y \cos^2 x} =$$

$$= \sqrt{\sin^2 x \operatorname{ch}^2 y + \operatorname{sh}^2 y (1 - \sin^2 x)} = \sqrt{\sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y}.$$

Si l'on pose $z = \pi + i \ln(2 + \sqrt{5})$, on trouve

$$|\sin[\pi+i\ln(2+\sqrt{5})]| = \operatorname{sh}[\ln(2+\sqrt{5})] =$$

$$= \frac{e^{\ln(2+\sqrt{5})}-e^{-\ln(2+\sqrt{5})}}{2} = \frac{2+\sqrt{5}-\dfrac{1}{2+\sqrt{5}}}{2} = 2.$$

Cet exemple montre que la fonction trigonométrique $\sin z$ peut prendre dans le domaine complexe des valeurs supérieures à l'unité en module.

Trouver le module et la détermination principale de l'argument des fonctions suivantes aux points indiqués:

62. $w=\cos z$, a) $z_1=\frac{\pi}{2}+i\ln 2$; b) $z_2=\pi+i\ln 2$.

63. $w=\operatorname{sh} z$, $z_0=1+i\frac{\pi}{2}$.

64. $w=ze^z$, $z_0=\pi i$. **65.** $w=\operatorname{ch}^2 z$, $z_0=i\ln 3$.

66. Trouver les logarithmes des nombres suivants:

a) e; b) $-i$; c) i; d) $-1-i$; e) $3-2i$; f) i^i.

67. Trouver:

a) i^i; b) $i^{\frac{1}{i}}$; c) 1^i; d) $(-1)^{\sqrt{2}}$;

e) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2i}$; f) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)^{1+i}$; g) $(1-i)^{3-3i}$.

68. Trouver le module ρ et l'argument φ des nombres complexes suivants: a) $\operatorname{th}\pi i$; b) 10^i; c) 3^{2-i}.

EXEMPLE 5. Mettre sous forme algébrique $\arcsin\frac{\pi}{3}i$.

SOLUTION. En posant dans la formule (7) $z=\frac{\pi}{3}i$, on obtient

$$\arcsin\frac{\pi}{3}i = -i\operatorname{Ln}\left(-\frac{\pi}{3}\pm\sqrt{1+\frac{\pi^2}{9}}\right).$$

D'ici l'on tire

$$\arcsin\frac{\pi}{3}i = -i\operatorname{Ln}\left[-\left(\frac{\pi}{3}+\sqrt{1+\frac{\pi^2}{9}}\right)\right]=$$

$$=-i\left[\ln\left(\frac{\pi}{3}+\sqrt{1+\frac{\pi^2}{9}}\right)+\pi i+2k\pi i\right]=$$

$$=(2k+1)\pi-i\ln\left(\frac{\pi}{3}+\sqrt{1+\frac{\pi^2}{9}}\right)\quad (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots)$$

et

$$\arcsin\frac{\pi}{3}i=$$

$$=-i\operatorname{Ln}\left(\sqrt{1+\frac{\pi^2}{9}}-\frac{\pi}{3}\right)=-i\left[\ln\left(\sqrt{1+\frac{\pi^2}{9}}-\frac{\pi}{3}\right)+2k\pi i\right]=$$

$$=2k\pi - i\ln\left(\sqrt{1+\frac{\pi^2}{9}}-\frac{\pi}{3}\right) \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

EXEMPLE 6. Mettre sous forme algébrique arctg $(1+i)$.
SOLUTION. En posant dans la formule (9) $z = 1+i$, on a

$$\operatorname{arctg}(1+i)=$$
$$=-\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{1+i(1+i)}{1-i(1+i)}=-\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{i}{2-i}=-\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\left(-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i\right).$$

Ensuite,

$$\operatorname{Ln}\left(-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i\right)=-\ln\sqrt{5}+(2k+1)\pi i-i\operatorname{Arctg}2.$$

Finalement, on obtient

$$\operatorname{arctg}(1+i)=-\frac{1}{2}\operatorname{Arctg}2+(2k+1)\frac{\pi}{2}+\frac{i}{2}\ln\sqrt{5}$$
$$(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants:

69. a) $e^{\frac{\pi}{4}i}$; b) $\ln(1-i)$.

70. a) $\sin \pi i$; b) $\cos \pi i$; c) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}i$.

71. a) $\operatorname{cotg}\pi i$; b) $\arcsin i$; c) $\operatorname{arctg}\frac{i}{3}$.

72. a) $\arccos i$; b) $\operatorname{sh}\frac{\pi i}{2}$; c) $\operatorname{th}\pi i$.

EXEMPLE 7. Résoudre l'équation $\sin z = 3$.
SOLUTION. Le problème se ramène à la recherche de la grandeur

$$z = \arcsin 3.$$

En utilisant la formule (7), on écrit

$$\arcsin t = -i\operatorname{Ln}(it+\sqrt{1-t^2}).$$

On obtient

$$z=\arcsin 3=-i\operatorname{Ln}(3i+\sqrt{-8})$$

ou, compte tenu du fait que

$$\sqrt{-8}=\pm\sqrt{8}i\ ,$$

on a

$$z=-i\,[\operatorname{Ln}(3+\sqrt{8})\,i], \qquad z=-i\,[\operatorname{Ln}(3-\sqrt{8})\,i].$$

Etant donné que

$$\operatorname{Arg}[(3+\sqrt{8})\,i]=\operatorname{Arg}[(3-\sqrt{8})\,i]=\frac{\pi}{2},$$

$$|(3+\sqrt{8})\,i|=3+\sqrt{8}, \qquad |(3-\sqrt{8})\,i|=3-\sqrt{8},$$

on a

$$\operatorname{Ln}[(3\pm\sqrt{8})\,i]=\ln(3\pm\sqrt{8})+\frac{\pi}{2}\,i+2k\pi i,$$

où $k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$ Par conséquent,

$$z=\frac{\pi}{2}+2k\pi-i\ln(3\pm\sqrt{8})\quad(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots).$$

Résoudre les équations suivantes:

73. $e^{-z}+1=0$. **74.** $e^{z}+i=0$. **75.** $4\cos z+5=0$.
76. $\operatorname{sh} iz=-i$. **77.** $\sin z=\pi i$.
78. $e^{ix}=\cos\pi x$ (x est un nombre réel). **79.** $e^{2z}+2e^{z}-3=0$.
80. $\operatorname{ch} z=i$. **81.** a) $\ln(z+i)=0$; b) $\ln(i-z)=1$.

§ 3. Limite d'une suite de nombres complexes. Limite et continuité d'une fonction d'une variable complexe

1. Soit donnée une suite de nombres complexes $\{z_n\}$

$$z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_n,\ \ldots$$

DÉFINITION 1. Un nombre complexe a est appelé *limite de la suite* $\{z_n\}$ si, pour tout ε positif, il existe un numéro $N=N(\varepsilon)$ à partir duquel tous les éléments z_n de cette suite vérifient l'inégalité

$$|z_n-a|<\varepsilon\qquad\text{pour}\qquad n\geqslant N(\varepsilon).$$

On dit que la suite $\{z_n\}$ qui admet comme limite le nombre a converge vers a, ce qui s'écrit $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=a$.

A chaque suite de nombres complexes $\{z_n\}$ on peut mettre en correspondance deux suites de nombres réels $\{x_n\}$ et $\{y_n\}$ de façon que $z_n=x_n+iy_n$, $n=1, 2, \ldots$

THÉORÈME 1. *La suite* $\{z_n=x_n+iy_n\}$ *converge vers un nombre* $a=\alpha+i\beta$ *si, et seulement si,*

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\alpha,\qquad \lim_{n\to\infty} y_n=\beta.$$

DÉFINITION 2. La suite $\{z_n\}$ est dite *bornée* s'il y a un nombre positif M tel que, pour tous les éléments z_n qu'elle contient, l'inégalité $|z_n|\leqslant M$ soit vérifiée.

THÉORÈME 2. *Toute suite convergente est une suite bornée.*

PROPRIÉTÉS DES SUITES CONVERGENTES DE NOMBRES COMPLEXES

Si $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=a$ et $\lim\limits_{n\to\infty}\tau_n=b$, alors:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(z_n\pm\tau_n)=a\pm b$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty}(z_n\tau_n)=ab$;
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{z_n}{\tau_n}=\dfrac{a}{b}$ $(\tau_n\neq0,\ b\neq0)$.

EXEMPLE 1. Montrer que la suite

$$z_n = \frac{n-i}{n+1}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

admet comme limite le nombre $a = 1$.

SOLUTION. Soit $\varepsilon > 0$ un nombre arbitraire. Nous allons montrer qu'il existe un numéro N tel que $|z - 1| < \varepsilon$ dès que $n \geqslant N$. Comme

$$|z_n - 1| = \left|\frac{n-i}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{1+i}{n+1}\right| = \frac{\sqrt{2}}{n+1},$$

l'inégalité $|z_n - 1| < \varepsilon$ sera satisfaite si $\frac{\sqrt{2}}{n+1} < \varepsilon$, c'est-à-dire pour $n > \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon} - 1$. Cela signifie que l'on peut prendre

$$N = N(\varepsilon) = \left[\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon} - 1\right] + 1.$$

Ici on désigne par le symbole $[x]$ la partie entière du nombre réel x.

EXEMPLE 2. Supposons que la suite $\{z_n\}$ admet comme limite le nombre a. Montrer que la suite $\{|z_n|\}$ converge vers une limite $|a|$.

En effet, étant donné que $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$,

$$\lim_{n\to\infty} |z_n - a| = 0. \tag{1}$$

D'autre part, pour deux nombres complexes quelconques z_n et a, l'inégalité

$$||z_n| - |a|| \leqslant |z_n - a| \tag{2}$$

est valable (cf. § 1). De (1) et (2) on tire $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = |a|$.

CONDITION SUFFISANTE DE CONVERGENCE D'UNE SUITE DE NOMBRES COMPLEXES

Soit $z_n = \rho_n e^{i\varphi_n}$, où $\rho_n = |z_n|$, $\varphi_n = \operatorname{Arg} z_n$. Alors, si $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = \rho_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi_0$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \rho_0 e^{i\varphi_0}$.

EXEMPLE 3. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = e^z, \qquad \text{où} \qquad z = x+iy.$$

DÉMONSTRATION. Désignons

$$z_n = \left(1+\frac{z}{n}\right)^n.$$

Alors

$$\lim_{n\to\infty} |z_n| = \lim_{n\to\infty}\left|\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^2 + \frac{y^2}{n^2}\right]^{\frac{n}{2}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x^2+y^2+2xn}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} = e^x.$$

Etant donné que

$$\varphi_n = \operatorname{Arg}\left(1+\frac{z}{n}\right) = \operatorname{Arctg}\frac{\frac{y}{n}}{1+\frac{x}{n}} = \operatorname{Arctg}\frac{y}{n+x},$$

on a

$$\operatorname{Arg} z_n = \operatorname{Arg}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = n \operatorname{Arg}\left(1+\frac{z}{n}\right) = n \operatorname{Arctg}\frac{y}{n+x}.$$

Donc,

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \lim_{n\to\infty} n \operatorname{Arctg}\frac{y}{n+x} = y.$$

En vertu de la condition de suffisance de la convergence d'une suite de nombres complexes, on obtient

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = e^x e^{iy} = e^{x+iy} = e^z,$$

ce qu'il fallait démontrer.

EXEMPLE 4. Montrer que la suite

$$z_n = \operatorname{Arg}\frac{(-1)^n}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

diverge.

DÉMONSTRATION. Etant donné que

$$z_n = \operatorname{Arg}\frac{(-1)^n}{n} = \begin{cases} 0 & \text{pour } n \text{ pair}, \\ \pi & \text{pour } n \text{ impair}, \end{cases}$$

la suite $\{z_n\}$ est de la forme π, 0, π, 0, . . . et n'admet pas de limite.

EXEMPLE 5. Soit

$$x_n = 1 + \rho \cos\alpha + \rho^2 \cos 2\alpha + \ldots + \rho^n \cos n\alpha,$$

où $0 < \rho < 1$, $n = 1, 2, \ldots$ Trouver $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

SOLUTION. Posons

$$y_n = \rho \sin\alpha + \rho^2 \sin 2\alpha + \ldots + \rho^n \sin n\alpha$$

et considérons la limite de la suite de nombres complexes

$$z_n = x_n + iy_n = 1 + \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha) +$$
$$+ \rho^2(\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha) + \ldots + \rho^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha).$$

Posons maintenant

$$t = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha), \quad |t| = \rho < 1.$$

En utilisant la formule de Moivre et la formule de la somme des termes d'une progression géométrique, on obtient

$$z_n = 1 + t + t^2 + \ldots + t^n = \frac{1-t^{n+1}}{1-t},$$

et, comme $|t| < 1$, on a

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \frac{1}{1-t}.$$

Par conséquent,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \operatorname{Re}\frac{1}{1-t} = \operatorname{Re}\frac{1}{1-\rho(\cos\alpha+i\sin\alpha)} =$$

$$= \frac{1-\rho\cos\alpha}{(1-\rho\cos\alpha)^2+\rho^2\sin^2\alpha} = \frac{1-\rho\cos\alpha}{1-2\rho\cos\alpha+\rho^2}.$$

Soit une suite $\{z_n\}$ de nombres complexes

$$z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$$

Si pour un nombre $M > 0$ aussi grand que l'on veut il existe un nombre naturel N tel que tous les termes z_n de la suite dont les numéros $n > N$ satisfassent à l'inégalité $|z_n| > M$, on dit que la suite $\{z_n\}$ *converge vers le point à l'infini*, on tout simplement à l'infini, et l'on écrit $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$.

En complétant le plan complexe par le point à l'infini $z = \infty$, on obtient le plan complexe élargi (fermé).

On appelle *voisinage du point à l'infini* l'ensemble de tous les points z qui vérifient l'inégalité $|z| > R$ (avec adjonction du point à l'infini), c'est-à-dire l'ensemble de tous les points z situés en dehors d'un disque de rayon suffisamment grand R centré sur l'origine des coordonnées.

Trouver les limites des suites:

82. $z_n = \left(1+\frac{1}{n}\right) e^{i\frac{\pi}{n}}$. 83. $z_n = \frac{i^n}{n}$. 84. $z_n = (1+3i)^n$.

85. $z_n = \frac{e^{in}}{n^2}$. 86. $z_n = \frac{n+2i}{3n+7i}$. 87. $z_n = e^{-i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2n}\right)}$.

88. $z_n = n\sin\frac{i}{n}$. 89. $z_n = n\cos\frac{n\pi}{2} + in\sin\frac{n\pi}{2}$.

90. $z_n = \frac{\operatorname{sh} in}{n}$.

91. On sait que

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \infty, \quad z_n = x_n + iy_n.$$

Qu'est-ce que l'on peut dire à propos de l'existence des limites admises par les suites $\{x_n\}$ et $\{y_n\}$ pour $n \to \infty$?

2. DÉFINITION 1. On appelle *voisinage d'un point* z_0 du plan complexe des z tout domaine qui contient ce point; on appelle *δ-voisinage du point* z_0 l'ensemble de tous les points z situés à l'intérieur d'un disque de rayon δ centré en z_0, c'est-à-dire l'ensemble de tous les points z satisfaisant à l'inégalité $|z - z_0| < \delta$.

Soit $f(z)$ une fonction définie dans un certain voisinage Ω du point z_0 sauf, peut-être, au point z_0 lui-même.

DÉFINITION 2. On appelle *limite d'une fonction* $f(z)$ *au point* z_0 un nombre A tel que pour tout nombre $\varepsilon > 0$ il soit possible d'indiquer un nombre $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ de façon que l'inégalité

$$|f(z) - A| < \varepsilon$$

reste valable pour tous les points $z \in \Omega$ qui satisfont à la condition $0 < |z - z_0| < \delta$. Dans ce cas, on écrit

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = A.$$

Ici on suppose que z_0 et A sont des points situés à des distances finies dans le plan complexe.

Donnons une autre définition de la limite d'une fonction en un point. Soit $f(z)$ une fonction définie dans un certain voisinage Ω du point z_0 sauf, peut-être, au point z_0 lui-même.

DÉFINITION 3. Si pour toute suite $\{z_n\}$, $z_n \neq z_0$, qui converge vers le point z_0 la suite de valeurs de la fonction $\{f(z_n)\}$ qui lui correspond converge vers le même nombre complexe A, ce nombre complexe A est appelé *limite de la fonction $f(z)$ au point z_0* et l'on écrit

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A.$$

Dans ce cas, on ne suppose pas que z_0 et A soient des points situés à des distances finies.

L'existence de la limite $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$, où

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \qquad z_0 = x_0 + iy_0,$$

équivaut à l'existence des deux limites:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x, y) \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x, y)$$

de plus,

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x, y) + i \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x, y).$$

Les limites des fonctions d'une variable complexe jouissent des propriétés suivantes.

Soient les limites

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A, \qquad \lim_{z \to z_0} g(z) = B.$$

Alors

$$\lim_{z \to z_0} [f(z) \pm g(z)] = A \pm B,$$

$$\lim_{z \to z_0} [f(z)\, g(z)] = AB,$$

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{A}{B}, \quad B \neq 0.$$

DÉFINITION 4. Une fonction $f(z)$ donnée dans un domaine D est dite *continue au point $z_0 \in D$* si

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Autrement dit, la fonction $f(z)$ est continue au point z_0 si, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut indiquer un nombre $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que, pour tous les points $z \in D$ qui satisfont à la condition $|z - z_0| < \delta$, l'inégalité $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ reste valable.

Pour que la fonction d'une variable complexe

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

soit continue au point $z_0 = x_0 + iy_0$, il faut et il suffit que ses parties réelle

et imaginaire, c'est-à-dire les fonctions $u(x, y)$ et $v(x, y)$, soient continues au point (x_0, y_0) par rapport à l'ensemble des variables x et y.

DÉFINITION 5. Une fonction $f(z)$ d'une variable complexe est *continue dans un domaine* D si elle est continue en chaque point de ce domaine.

La somme, la différence et le produit de deux fonctions d'une variable complexe $f(z)$ et $g(z)$ continues dans le domaine D sont également des fonctions continues dans ce domaine, alors que la fonction $\frac{f(z)}{g(z)}$ n'est continue qu'aux points du domaine D où $g(z) \neq 0$.

Si la fonction $f(y)$ est continue au point z_0, tandis que la fonction $F(\tau)$ est continue au point $\tau_0 = f(z_0)$, la fonction composée $F[f(z)]$ est continue elle aussi au point z_0.

EXEMPLE 6. On donne une fonction linéaire

$$w = f(z) = az + b,$$

où a et b sont des constantes complexes. Montrer qu'au point z_0 cette fonction admet une limite égale à $w_0 = az_0 + b$, $a \neq 0$.

DÉMONSTRATION. En effet, prenons un nombre arbitraire $\varepsilon > 0$. Etant donné que

$$|f(z) - w_0| = |(az + b) - (az_0 + b)| = |az - az_0| = |a| \cdot |z - z_0|,$$

en choisissant en qualité de $\delta(\varepsilon) > 0$ le nombre $\delta = \frac{\varepsilon}{|a|}$, on aura $|f(z) - w_0| < \varepsilon$ pour $0 < |z - z_0| < \delta$. Cela signifie que $w_0 = az_0 + b$ est la limite de la fonction $f(z) = az + b$ au point z_0.

Etant donné que

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = az_0 + b = f(z_0),$$

on peut conclure que la fonction linéaire considérée est continue en tout point z_0.

EXEMPLE 7. Montrer que la fonction $w = z^2$ est continue pour n'importe quelle valeur de z.

SOLUTION. Prenons un point arbitraire z_0 et un nombre arbitraire $\varepsilon > 0$. Etant donné que la valeur de la fonction $f(z) = z^2$ au point z_0 est égale à $f(z_0) = z_0^2$, nous allons montrer qu'il existe un nombre $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que $|z^2 - z_0^2| < \varepsilon$ pour $|z - z_0| < \delta$.

Si $z \to z_0$, il doit exister un nombre $M > 0$ tel que $|z| < M$ et $|z_0| < M$. Alors

$$|z^2 - z_0^2| = |(z + z_0)(z - z_0)| = |z + z_0| \cdot |z - z_0| <$$
$$< (|z| + |z_0|)\,|z - z_0| < 2M\,|z - z_0|.$$

Si l'on pose $\delta = \frac{\varepsilon}{2M}$, de l'inégalité $|z - z_0| < \delta$ il découle que

$$|z^2 - z_0^2| < 2M\delta \leqslant \varepsilon,$$

ce qui signifie que la fonction $w = z^2$ est continue pour tout z_0.

En utilisant la définition de la limite, montrer que

92. $\lim\limits_{z \to 1} \frac{2z+1}{z+2} = 1$. **93.** $\lim\limits_{z \to 3-4i} |z| = 5$.

Calculer les limites suivantes:

94. $\lim\limits_{z \to -i} \frac{z^2+3iz-2}{z+i}$. **95.** $\lim\limits_{z \to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2z}{\operatorname{ch} iz + i \operatorname{sh} iz}$.

96. $\lim\limits_{z\to 0} \frac{\sin z}{\operatorname{sh} iz}$. 97. $\lim\limits_{z\to -\frac{\pi}{2} i} \frac{e^{2z}+1}{e^z+i}$.

Montrer que les fonctions suivantes sont continues dans tout le plan complexe:

98. $f(z) = \bar{z}$. 99. $f(z) = \operatorname{Re} z$. 100. $f(z) = \operatorname{Im} z$.

101. $P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$, où a_k ($k = 0, 1, \ldots, n$) sont des constantes complexes.

102. Montrer que la fonction rationnelle $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, où $P(z)$ et $Q(z)$ sont des polynômes, est continue en tous les points du plan complexe des z où $Q(z) \neq 0$.

103. Montrer que la fonction $w = e^z$ est continue en tous les points du plan complexe.

§ 4. Dérivation des fonctions d'une variable complexe. Conditions de Cauchy-Riemann

Soit une fonction $w = f(z)$ définie dans un certain domaine D du plan complexe des z. Supposons que les points z et $z + \Delta z$ appartiennent au domaine D. Désignons

$$\Delta w = f(z + \Delta z) - f(x), \qquad \Delta z = \Delta x + i\Delta y.$$

DÉFINITION 1. On dit que la fonction $w = f(z)$ est *différentiable au point* $z \in D$ si le rapport $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ possède une limite finie lorsque Δz tend vers zéro d'une façon arbitraire. Cette limite est appelée *dérivée* de la fonction $f(z)$ au point z donné et est désignée par le symbole $f'(z)$ $\left(\text{ou } w', \text{ ou encore } \frac{dw}{dz}\right)$. De cette façon, par définition,

$$w' = f'(z) = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}. \tag{1}$$

Si $z = x + iy$, $w = f(z) - u(x, y) + iv(x, y)$, alors en chaque point de différentiabilité de la fonction $f(z)$ les rapports

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{2}$$

sont valables. Ces rapports sont connus en tant que *conditions de Cauchy-Riemann*.

Inversement, si en un certain point (x, y) les fonctions $u(x, y)$ et $v(x, y)$ sont différentiables en tant que fonctions des variables réelles x et y et si, en outre, elles vérifient les rapports (2), alors la fonction $f(z) = u + iv$ est différentiable au point $z = x + iy$ en qualité de fonction de la variable complexe z.

DÉFINITION 2. La fonction $w = f(z)$ est dite *analytique en un point donné* $z \in D$ si elle est différentiable aussi bien au point z lui-même que dans un certain voisinage de ce point. On dit que la fonction $f(z)$ est *analytique dans le domaine* D si elle est différentiable en chaque point de ce domaine. Pour toute fonction analytique $f(z)$, on a

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{3}$$

EXEMPLE 1. Montrer que la fonction $w = e^z$ est analytique dans tout le plan complexe.

SOLUTION. On a $e^z = e^x (\cos y + i \sin y)$, de façon que

$$u(x, y) = e^x \cos y, \qquad v(x, y) = e^x \sin y.$$

Les fonctions $u(x, y)$ et $v(x, y)$ étant des fonctions des variables réelles x et y, elles sont différentiables en tout point (x, y) (elles possèdent des dérivées partielles continues de n'importe quel ordre) et satisfont, en outre, aux conditions (2).

Il s'ensuit que la fonction $w = e^z$ est analytique partout. D'après la formule (3), on obtient pour la fonction $f(z) = e^z$

$$(e^z)' = (e^x \cos y)'_x + i (e^x \sin y)'_x = e^x (\cos y + i \sin y) = e^z.$$

Donc, $(e^z)' = e^z$.

EXEMPLE 2. Est-ce que la fonction $w = z\bar{z}$ est analytique ne fût-ce qu'en un seul point?

SOLUTION. On a $z\bar{z} = x^2 + y^2$, de façon que

$$u(x, y) = x^2 + y^2, \quad v(x, y) = 0.$$

Dans ce cas, les conditions de Cauchy-Riemann prennent la forme

$$\left.\begin{array}{l} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{array}\right\}$$

et ne sont satisfaites qu'au point (0, 0).

Par conséquent, la fonction $w = z\bar{z}$ n'est différentiable qu'au point $z = 0$ et elle n'est analytique nulle part.

Montrons, en nous appuyant sur la définition 1, que la fonction $f(z) = z\bar{z}$ est différentiable au point $z = 0$. En effet, $f(0) = 0$. Pour cette raison,

$$\Delta f = f(0 + \Delta z) - f(0) = \Delta z \cdot \overline{\Delta z}$$

et

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta z \cdot \overline{\Delta z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \overline{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} (\Delta x - i\Delta y) = 0.$$

Donc, la dérivée $f'(0)$ existe et elle est égale à zéro.

EXEMPLE 3. Est-ce que la fonction $w = \bar{z} = x - iy$ est analytique?

SOLUTION. Ici les fonctions des variables x et y $u(x, y) = x$ et $v(x, y) = -y$ sont partout différentiables. On a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = -1.$$

Ainsi, $\frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y}$, ce qui signifie que la première des conditions de Cauchy-Riemann n'est satisfaite en aucun point du plan complexe.

Il s'ensuit que la fonction $w = \bar{z}$ n'est différentiable nulle part, donc, elle n'est pas analytique.

En utilisant les conditions de Cauchy-Riemann, indiquer parmi les fonctions suivantes celles qui sont analytiques au moins en un point et celles qui ne le sont pas:

104. a) $w = z^2\bar{z}$; b) $w = ze^z$; c) $w = |z|\,\bar{z}$;

d) $w = e^{z^2}$; e) $w = |z| \operatorname{Re} \bar{z}$; f) $w = \sin 3z - i$.

105. a) $w = \bar{z} \operatorname{Re} z$; b) $w = \bar{z} \operatorname{Im} z$; c) $w = |z| \operatorname{Im} z$; d) $w = \operatorname{ch} z$.

106. Montrer que la fonction $w = \ln z$ est analytique dans le domaine $\operatorname{Re} z > 0$.

107. Montrer par calcul direct que si n est un nombre naturel,

$$(z^n)' = nz^{n-1}.$$

108. Montrer que si les fonctions analytiques $f(z)$ et $\varphi(z)$ satisfont à la condition $f'(z) = \varphi'(z)$, alors $f(z) = \varphi(z) + \text{const}$.

109. Montrer que si l'on passe des coordonnées cartésiennes (x, y) aux coordonnées polaires (ρ, φ), les conditions de Cauchy-Riemann prennent la forme

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \varphi}, \qquad \frac{\partial v}{\partial \rho} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi}. \tag{4}$$

110. Montrer que si la fonction analytique $w = f(z)$ est une fonction réelle dans un certain domaine, elle est alors constante.

111. Montrer que si la fonction $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ est analytique dans un domaine D, l'égalité

$$\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

est vérifiée dans ce domaine.

112. Soit $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ une fonction analytique dans un domaine D. Montrer que les familles des lignes $u(x, y) = \text{const}$ et $v(x, y) = \text{const}$ sont orthogonales.

113. Montrer que le module et l'argument de la fonction analytique

$$f(z) = R(x, y)\, e^{i\Phi(x, y)}$$

sont liés par les relations

$$\frac{\partial R}{\partial x} = R \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \qquad \frac{\partial R}{\partial y} = -R \frac{\partial \Phi}{\partial x}.$$

En utilisant les conditions de Cauchy-Riemann, on peut rétablir une fonction analytique $f(z)$ si l'on connaît sa partie réelle $u(x, y)$ ou celle imaginaire $v(x, y)$ (cf. [9]).

En outre, une fonction $f(z)$ analytique dans le voisinage d'un point z_0, peut être rétablie à l'aide de l'une des formules suivantes (cf. [5]):

$$f(z) = 2u\left(\frac{z + \bar{z}_0}{2}, \frac{z - \bar{z}_0}{2i}\right) - \bar{C}_0, \tag{5}$$

$$f(z) = 2iv\left(\frac{z + \bar{z}_0}{2}, \frac{z - \bar{z}_0}{2i}\right) + \bar{C}_0, \tag{6}$$

où $\bar{C}_0$ est le nombre conjugué de $C_0 = f(z_0)$, alors que $\bar{z}_0$ est le conjugué de z_0.

EXEMPLE 4. Trouver la fonction analytique $w = f(z)$ si l'on connaît

sa partie réelle $u(x, y) = 2e^x \cos y$ et compte tenu de la condition supplémentaire $f(0) = 2$.

SOLUTION. PREMIÈRE MÉTHODE. On a $\frac{\partial u}{\partial x} = 2e^x \cos y$. En vertu de la première des conditions de Cauchy-Riemann, il faut que $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, de façon que $\frac{\partial v}{\partial y} = 2e^x \cos y$. Donc $v(x, y) = \int 2e^x \cos y\, dy = 2e^x \sin y + \varphi(x)$, où la fonction $\varphi(x)$ n'est pas encore connue. En dérivant $v(x, y)$ par rapport à x et en utilisant la seconde des conditions de Cauchy-Riemann, on obtient

$$2e^x \sin y + \varphi'(x) = -\frac{\partial u}{\partial y} = 2e^x \sin y,$$

d'où $\varphi'(x) = 0$, ce qui signifie que $\varphi(x) = C$, où $C = \text{const}$.

Ainsi, $v(x, y) = 2e^x \sin y + C$, et, par conséquent,

$$f(z) = 2e^x \cos y + i(2e^x \sin y + C) = 2e^z + iC.$$

La constante C est trouvée en partant de la condition $f(0) = 2$, c'est-à-dire $2e^0 + iC = 2$, d'où l'on trouve $C = 0$. La réponse sera: $f(z) = 2e^z$.

DEUXIÈME MÉTHODE. Mettons à profit la formule (5). Dans le cas examiné, $u(x, y) = 2e^x \cos y$, $z_0 = 0$, $C_0 = 2$. D'après la formule (5), on aura $f(z) = 2 \cdot 2e^{z/2} \cos \frac{z}{2i} - 2$. Ayant en vue que $\cos \frac{z}{2i} = \cos\left(-\frac{iz}{2}\right) = \operatorname{ch} \frac{z}{2}$, on obtient finalement $f(z) = 2e^z$.

EXEMPLE 5. Trouver la fonction analytique $w = f(z)$ si l'on connaît sa partie imaginaire $v(x, y) = 3x + 2xy$ et que $f(-i) = 2$.

SOLUTION. Utilisons la formule (6). Dans le cas examiné, $v(x, y) = 3x + 2xy$, $z_0 = -i$, $C_0 = 2$, de façon que

$$f(z) = 2i\left(3\frac{z+i}{2} + 2\frac{z+i}{2} \cdot \frac{z-i}{2i}\right) + 2 = 3iz + z^2.$$

Rétablir la fonction analytique $f(z)$ dans le voisinage du point z_0 d'après sa partie réelle $u(x, y)$ ou imaginaire $v(x, y)$ qui est connue et d'après la valeur de $f(z_0)$:

114. a) $u = \frac{x}{x^2+y^2}$, $f(\pi) = \frac{1}{\pi}$; b) $v = \operatorname{Arctg} \frac{y}{x}$ $(x > 0)$, $f(1) = 0$;

c) $u = x^2 - y^2 + 2x$, $f(i) = 2i - 1$.

115. a) $v = 2(\operatorname{ch} x \sin y - xy)$, $f(0) = 0$;
b) $u = 2 \sin x \operatorname{ch} y - x$, $f(0) = 0$;
c) $v = 2(2 \operatorname{sh} x \sin y + xy)$, $f(0) = 3$.

116. a) $v = -2 \sin 2x \operatorname{sh} 2y + y$, $f(0) = 2$;
b) $v = 2 \cos x \operatorname{ch} y - x^2 + y^2$, $f(0) = 2$.

DÉFINITION 3. Une fonction $\varphi(x, y)$ est appelée *harmonique dans un domaine D* si elle possède dans ce domaine des dérivées partielles continues allant

jusqu'à l'ordre 2 inclusivement et si elle satisfait à l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0.$$

Si une fonction $f(z) = u + iv$ est analytique dans un certain domaine D, ses parties réelle $u(x, y)$ et imaginaire $v(x, y)$ sont des fonctions harmoniques dans ce domaine.

Toutefois, si l'on a deux fonctions harmoniques quelconques $u_1(x, y)$ et $v_1(x, y)$, cela ne veut pas dire que la fonction $f_1(z) = u_1(x, y) + iv_1(x, y)$ doit obligatoirement être une fonction analytique. Pour qu'il en soit ainsi, les fonctions u_1 et v_1 doivent en outre vérifier les conditions de Cauchy-Riemann.

Deux fonctions harmoniques qui satisfont aux conditions (2) forment un *couple conjugué de fonctions harmoniques* (l'ordre de disposition des fonctions dans le couple est essentiel).

117. Montrer que les fonctions suivantes sont des fonctions harmoniques:

a) $u=x^2+2x-y^2$; b) $u=2e^x\cos y$; c) $u=\frac{x}{x^2+y^2}$;

d) $u=-\frac{y}{x^2+y^2}$; e) $u=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$; f) $u=\ln(x^2+y^2)$.

118. Est-ce que les fonctions ci-dessous peuvent former la partie réelle ou imaginaire de la fonction analytique $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$?

a) $u = x^2 - y^2 + 2xy$; b) $u= x^2$; c) $v = \ln(x^2 + y^2)$;

d) $v=\frac{x^2+1}{2}y^2$.

119. Quelles sont les conditions nécessaires pour que le trinôme $u = ax^2 + 2bxy + cy^2$ soit une fonction harmonique?

Dans les exemples qui suivent, on indique les couples $u(x, y)$, $v(x, y)$ de fonctions harmoniques. Trouver parmi eux les couples conjugués de fonctions harmoniques.

120. a) $u=3(x^2-y^2)$, $v=3x^2y-y^3$;

b) $u=\frac{x}{x^2+y^2}$, $v=-\frac{y}{x^2+y^2}$;

c) $u=x$, $v=-y$;

d) $u=e^x\cos y+1$, $v=1+e^x\sin y$.

121. Soit $u(x, y)$ une fonction harmonique dans un domaine D où elle possède des dérivées partielles continues de n'importe quel ordre. Montrer que ces dérivées sont également des fonctions harmoniques dans le domaine D.

122. Soit $u = u(x, y)$ une fonction harmonique dans un domaine D. Trouver toutes les fonctions f pour lesquelles la fonction $f(u)$ sera harmonique dans le domaine D.

123. Soit $w = f(z)$ une fonction analytique dans un domaine D. Quelles fonctions parmi celles indiquées ci-dessous: a) $|w|$; b) $\operatorname{Arg} w$; c) $\ln |w|$ seront harmoniques dans le domaine D?

124. Montrer que le produit de deux fonctions harmoniques conjuguées $u(x, y)$, $v(x, y)$ dans un domaine D sera une fonction harmonique dans ce domaine.

125. Soit $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ un couple de fonctions harmoniques conjuguées dans un domaine D. Quels couples de fonctions parmi ceux indiqués ci-dessous

a) $Au - Bv$, $Bu + Av$, A et B étant des constantes;

b) $u^2 - v^2$, uv; c) $e^u \cos v$, $e^u \sin v$

réunissent des fonctions harmoniques conjuguées?

EXEMPLE 6. Trouver toutes les fonctions harmoniques de la forme $u = f(x^2 + y^2)$ qui diffèrent d'une constante.

SOLUTION. Etant donné que les fonctions inconnues doivent être harmoniques, elles doivent satisfaire à l'équation de Laplace

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{7}$$

Portons la fonction donnée dans l'équation (7). Pour ce faire, trouvons ses dérivées secondes. Posons $t = x^2 + y^2$. On aura $u = f(t)$, où $t = t(x, y)$. D'après la règle de dérivation d'une fonction composée, on trouve

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'(t)\frac{\partial t}{\partial x}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = f'(t)\frac{\partial t}{\partial y};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''(t)\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2 + f'(t)\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}; \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f''(t)\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)^2 + f'(t)\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}.$$

En additionnant les deux dernières égalités, on obtient

$$\left[\left(\frac{\partial t^2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)^2\right] f''(t) + \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}\right) f'(t) = 0$$

ou

$$tf''(t) + f'(t) = 0.$$

Pour la recherche de la fonction f, nous avons obtenu l'équation d'Euler

$$t^2 f''(t) + tf'(t) = 0,$$

dont la solution générale est donnée par la fonction

$$f(t) = C_1 \ln t + C_2, \quad C_1 \text{ et } C_2 \text{ étant des constantes.}$$

De cette façon, les fonctions harmoniques inconnues sont de la forme

$$u = f(x^2 + y^2) = C_1 \ln (x^2 + y^2) + C_2.$$

Trouver toutes les fonctions harmoniques correspondant aux formes indiquées:

126. $x = f(ax + by)$; a, b sont des constantes.

127. $u = f(xy)$. **128.** $u = f\left(\frac{y}{x}\right)$. **129.** $u = f(x^2 - y^2)$.

130. $u=f(x+\sqrt{x^2+y^2})$. **131.** $u=f\left(\frac{x^2+y^2}{x}\right)$.

SENS GÉOMÉTRIQUE DU MODULE ET DE L'ARGUMENT D'UNE DÉRIVÉE

Soit $f(z)$ une fonction analytique au point z_0 et soit $f'(z_0)\neq 0$. Alors $|f'(z_0)|$ est égal au coefficient de dilatation au point z_0 par l'application $w=f(z)$ du plan des z sur le plan des w; pour plus de précision, il faut indiquer que pour $|f'(z_0)|>1$ on assiste à une dilatation, alors que pour $|f'(z_0)|<1$ il y a contraction.

Du point de vue géométrique, l'argument de la dérivée $f'(z_0)$ est égal à l'angle duquel il faut tourner la tangente au point z_0 à toute courbe lisse dans le plan des z qui passe par le point z_0 pour obtenir l'orientation de la tangente au point $w_0=f(z_0)$ à l'image de cette courbe dans le plan des w par l'application $w=f(z)$. Remarquons que pour $\varphi=\operatorname{Arg} f'(z)>0$, la rotation se fait dans le sens antihoraire, tandis que pour $\varphi<0$, dans le sens horaire.

EXEMPLE 7. Trouver le coefficient de dilatation et l'angle de rotation au point $z_0=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ par l'application $w=z^2$.

SOLUTION. On a $w'(z)=2z$, de façon que $w'|_{z=\sqrt{2}+i\sqrt{2}}=2\sqrt{2}+$ $+i2\sqrt{2}$.

En passant de la présentation du nombre complexe $2\sqrt{2}+i2\sqrt{2}$ sous forme algébrique à sa présentation sous forme trigonométrique, on obtient

$$2\sqrt{2}+i2\sqrt{2}=4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=4\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Donc,

$$|f'(z)|_{z=\sqrt{2}+i\sqrt{2}}=4,\qquad \operatorname{Arg} f'(z)|_{z=\sqrt{2}+i\sqrt{2}}=\frac{\pi}{4},$$

ce qui signifie que le coefficient de dilatation $r=4$, alors que l'angle de rotation $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

Trouver le coefficient de dilatation r et l'angle de rotation φ aux points donnés par les applications $w=f(z)$ indiquées:

132. a) $w=e^z$ aux points $z_1=\ln 2+i\frac{\pi}{4}$ et $z_2=-1-i\frac{\pi}{2}$;

b) $w=\sin z$ aux points $z_1=0$ et $z_2=1+i$;

c) $w=z^3$ aux points $z_1=2-i$ et $z_2=1+i\frac{\pi}{2}$.

133. Indiquer la partie du plan complexe qui se dilate et celle qui se contracte en présence des applications suivantes:

a) $w=e^z$; b) $w=\ln z$; c) $w=\frac{1}{z}$; d) $w=z^3$.

Si une fonction $w=f(z)$ analytique dans un certain domaine D applique d'une façon biunivoque ce domaine sur le domaine $\widetilde{D}$, alors une courbe L disposée dans le domaine D aura comme image dans le plan des w une certaine courbe $\widetilde{L}$

dont la longueur sera

$$l_w = \int_L |f'(z)|\,|dz|. \tag{8}$$

Par l'application $w = f(z)$, le domaine D du plan des z est transformé en le domaine $\widetilde{D}$ du plan des w et l'aire du domaine $\widetilde{D}$ ainsi obtenu est donnée par la formule

$$S_{\widetilde{D}} = \iint_D |f'(z)|^2\,dx\,dy. \tag{9}$$

De cette façon, $|f'(z)|^2$ est égal au coefficient de distorsion de l'aire par l'application $w = f(z)$.

EXEMPLE 8. Le point $z = x + iy$ décrit le segment

$$x = 1, \quad -1 \leqslant y \leqslant 1. \tag{10}$$

Quelle sera la longueur de la ligne obtenue par l'application de ce segment réalisée à l'aide de la fonction $w = z^2$?

SOLUTION. PREMIÈRE MÉTHODE. On a $w = z^2$ ou

$$u + iv = x^2 - y^2 + i2xy,$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} u = x^2 - y^2, \\ v = 2xy. \end{cases}$$

Il est évident que sur la ligne (10) on aura

$$\begin{cases} u = 1 - y^2, \\ v = 2y, \end{cases} \tag{11}$$

de plus, lorsque y varie de -1 à $+1$, v variera de -2 à $+2$. De (11) on tire l'équation de la parabole

$$u = 1 - \frac{v^2}{4} \quad \text{(fig. 3)}. \tag{12}$$

La longueur de l'arc $A'B'C'$ de la parabole (12) sera

$$l_w = 2\int_0^2 \sqrt{1 + \frac{v^2}{4}}\,dv = \int_0^2 \sqrt{4 + v^2}\,dv = 2\sqrt{2} + \ln(3 + 2\sqrt{2}).$$

DEUXIÈME MÉTHODE. D'après la formule (8), on a

$$l_w = \int_L |f'(z)|\,|dz| = \int_L |2z|\,|dz| = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1+y^2}\,dy = 4\int_0^1 \sqrt{1+y^2}\,dy =$$

$$= 2\sqrt{2} + \ln(3 + 2\sqrt{2}).$$

EXEMPLE 9. Calculer l'aire du domaine obtenu par l'application $w = e^z$ du carré

$$a - \varepsilon \leqslant x \leqslant a + \varepsilon, \quad -\varepsilon \leqslant y \leqslant \varepsilon \quad \text{(fig. 4)}$$

(a est un nombre réel, $0 < \varepsilon < \pi$, $z = x + iy$).

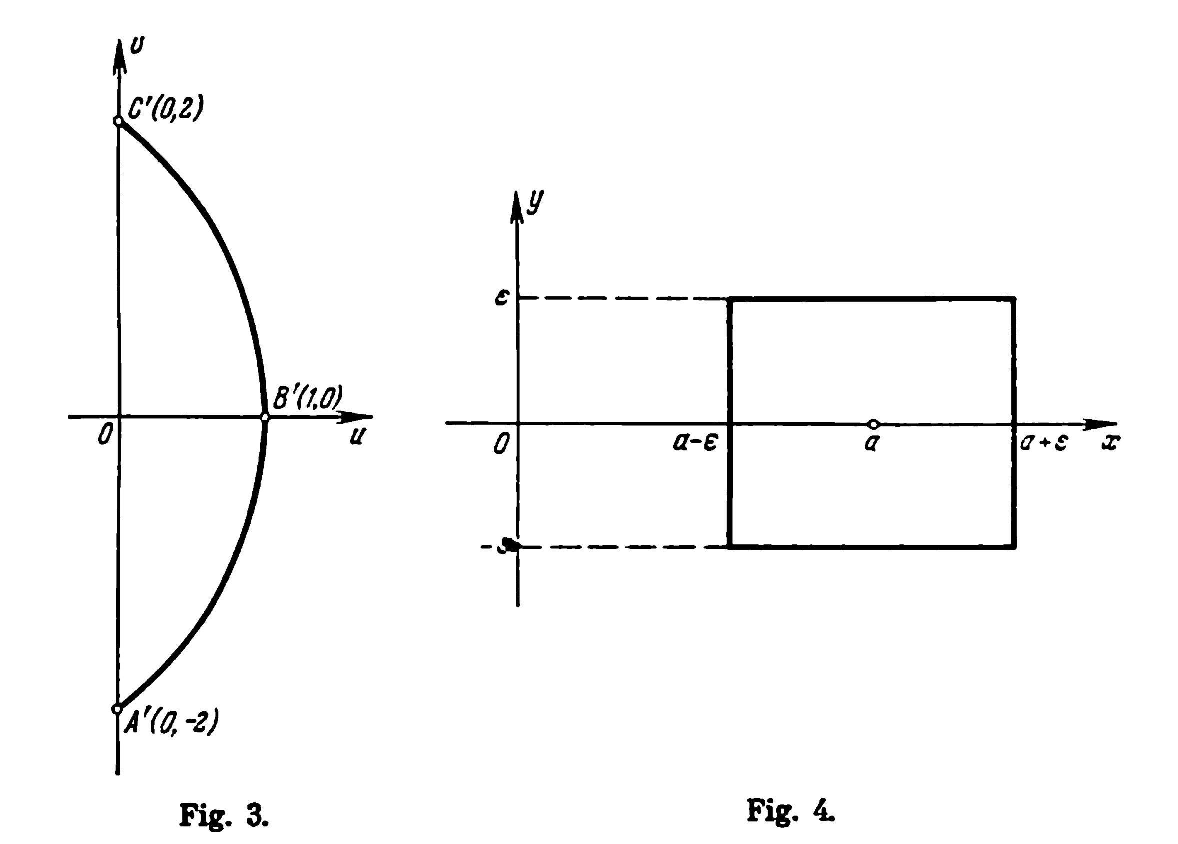


Fig. 3. Fig. 4.

Calculer la limite du rapport de ces aires lorsque $\varepsilon \to 0$.

SOLUTION. PREMIÈRE MÉTHODE. On a $w = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$ ou $w = \rho e^{i\varphi}$, où $\rho = e^x$, $\varphi = y$. De cette façon, par l'application $w = e^z$ on obtient dans le plan des z un domaine borné par deux demi-droites $\operatorname{Arg} w = -\varepsilon$ et $\operatorname{Arg} w = \varepsilon$ et par les arcs de deux circonférences $\rho = e^{a-\varepsilon}$ et $\rho = e^{a+\varepsilon}$ (fig. 5). L'aire du domaine obtenu à la suite de l'application indiquée sera

$$S_w = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} d\varphi \int_{e^{a-\varepsilon}}^{e^{a+\varepsilon}} \rho\, d\rho = \varepsilon e^{2a-2\varepsilon}(e^{4\varepsilon}-1).$$

DEUXIÈME MÉTHODE. En appliquant la formule (9), on a

$$S_w = \iint_D |f'(z)|^2\, dx\, dy = \iint_D e^{2x}\, dx\, dy =$$

$$= \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} e^{2x}\, dx \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dy = \varepsilon e^{2a-2\varepsilon}(e^{4\varepsilon}-1).$$

Il est évident que l'aire S_z du domaine D est donnée par la relation $S_z = 4\varepsilon^2$. C'est pour cela que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{S_w}{S_z} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\varepsilon e^{2a-2\varepsilon}(e^{4\varepsilon}-1)}{4\varepsilon^2} = e^{2a}.$$

134. Trouver l'aire de l'image du carré D $\{0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$

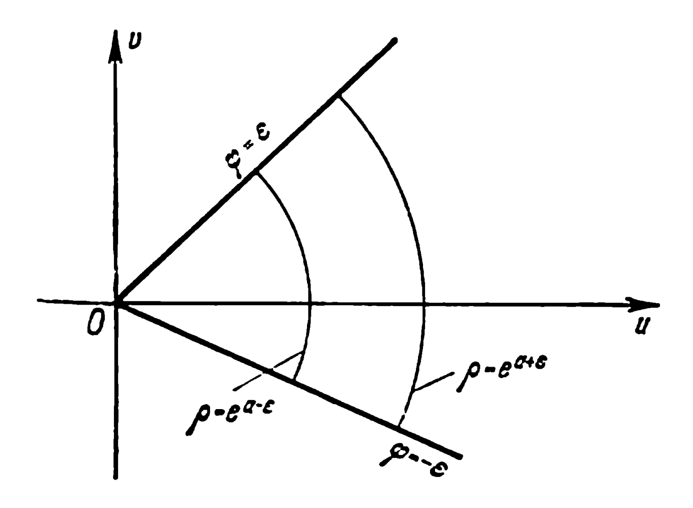


Fig. 5.

obtenue par l'application $w = z^2$, de même que la longueur de sa frontière.

135. Trouver l'aire de l'image du rectangle

$$P\left\{0 < x_1 \leqslant x \leqslant x_2 < \frac{\pi}{2},\ 0 < y_1 \leqslant y \leqslant y_2 < \frac{\pi}{2}\right\}$$

obtenue par l'application $w = \cos z$.

136. Supposons que z décrit un domaine défini par les conditions

$$1 \leqslant |z| \leqslant 2,\quad -\frac{\pi}{4} \leqslant \operatorname{Arg} z \leqslant \frac{\pi}{4}.$$

Trouver l'aire du domaine obtenu par l'application $w = z^2$.

137. Trouver la longueur L de la spirale sur laquelle est appliqué le segment $y = x$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ par la fonction $w = e^z$.

138. Trouver le domaine P_w sur lequel la fonction $w = e^z$ applique le rectangle $P\{1 \leqslant x \leqslant 2,\ 0 \leqslant y \leqslant 8\}$. Calculer l'aire du domaine P_w à l'aide de la formule (9) et indiquer la raison pour laquelle le résultat obtenu de cette façon n'est pas correct.

139. Trouver l'aire de la figure obtenue par l'application d'un triangle borné par les lignes $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$ à l'aide de la fonction $w = 1 + iz$.

§ 5. Intégration des fonctions d'une variable complexe

Soit $f(z)$ une fonction uniforme définie et continue dans un domaine D et soit C une courbe orientée lisse par morceaux, fermée ou non fermée, située dans D.

Soient

$$z = x + iy,\qquad f(z) = u + iv,$$

où $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ sont des fonctions réelles des variables x et y.

Le calcul de l'intégrale de la fonction $f(z)$ de la variable complexe z se

ramène au calcul des intégrales curvilignes habituelles, c'est-à-dire

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C u\,dx - v\,dy + i\int_C v\,dx + u\,dy. \qquad (1)$$

Généralement parlant, l'intégrale $\int_C f(z)\,dz$ dépend du chemin d'intégration C.

Si $f(z)$ est une fonction analytique dans un domaine simplement connexe D, l'intégrale ne dépend pas du chemin d'intégration. Dans ce cas,

$$\int_L f(z)\,dz = 0,$$

où L représente tout contour fermé lisse par morceaux dans le domaine D.

Si la courbe C est donnée par les équations paramétriques

$$x = x(t), \qquad y = y(t)$$

et si le point de départ et le point final de l'arc C correspondent aux valeurs du paramètre $t = t_0$, $t = t_1$, alors

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{t_0}^{t_1} [z(t)]\,z'(t)\,dt, \qquad (2)$$

où

$$z(t) = x(t) + iy(t).$$

Si la fonction $f(z)$ est analytique dans un domaine simplement connexe D qui contient les points z_0 et z_1, la formule de Newton-Leibniz

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz = \Phi(z_1) - \Phi(z_0) = \Phi(z)\Big|_{z_0}^{z_1} \qquad (3)$$

est vérifiée. Ici, $\Phi(z)$ est une primitive quelconque pour la fonction $f(z)$, c'est-à-dire

$$\Phi'(z) = f(z)$$

dans le domaine D.

Si les fonctions $f(z)$ et $\varphi(z)$ sont des fonctions analytiques dans un domaine simplement connexe D, z_0 et z_1 étant des points arbitraires situés dans ce domaine, la formule d'intégration par parties

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\,\varphi'(z)\,dz = [f(z)\,\varphi(z)]\Big|_{z_0}^{z_1} - \int_{z_0}^{z_1} \varphi(z)\,f'(z)\,dz$$

est valable.

Pour les intégrales des fonctions d'une variable complexe, le changement de variables s'effectue d'une façon analogue au cas des fonctions d'une variable réelle. Supposons que la fonction analytique $z = \varphi(w)$ réalise une application biunivoque du contour C_1 situé dans le plan des w sur le contour C dans le plan des z. Alors

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f[\varphi(w)]\,\varphi'(w)\,dw.$$

Si le chemin d'intégration est constitué par une demi-droite qui sort du point z_0 ou par une circonférence de centre z_0, il est utile d'effectuer le changement de variable suivant:

$$z - z_0 = \rho e^{i\varphi}.$$

Dans le premier cas, $\varphi = \text{const}$, tandis que ρ est la variable réelle d'intégration; dans le second cas, au contraire, $\rho = \text{const}$, φ étant la variable réelle d'intégration.

EXEMPLE 1. Calculer l'intégrale

$$\int_C (1+i-2\bar{z})\,dz$$

prise le long des lignes qui relient les points $z_1 = 0$ et $z_2 = 1 + i$:

1) suivant une droite;
2) suivant la parabole $y = x^2$;
3) suivant la ligne polygonale $z_1z_3z_2$, où $z_3 = 1$.

SOLUTION. Récrivons la fonction figurant sous le signe d'intégration:

$$1 + i - 2\bar{z} = (1 - 2x) + i\,(1 + 2y).$$

Ici $u = 1 - 2x$, $v = 1 + 2y$.

En utilisant la formule (1), on obtient

$$\int_C (1+i-2\bar{z})\,dz = \int_C (1-2x)\,dx-(1+2y)\,dy+i\int_C (1+2y)\,dx+(1-2x)\,dy.$$

1) L'équation de la droite qui passe par les points $z_1 = 0$ et $z_2 = 1 + i$ sera $y = x$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, ce qui veut dire que $dy = dx$. Pour cette raison,

$$\int_C (1+i-2\bar{z})\,dz = \int_0^1 [(1-2x)-(1+2x)]\,dx+$$
$$+i\int_0^1 [(1+2x)+(1-2x)]\,dx=2\,(i-1).$$

2) Pour la parabole $y = x^2$, on a $dy = 2x\,dx$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$. Il s'ensuit que

$$\int_C (1+i-2\bar{z})\,dz = \int_0^1 [1-2x-(1+2x^2)\,2x]\,dx+$$
$$+i\int_0^1 [1+2x^2+(1-2x)\,2x]\,dx=-2+\frac{4}{3}\,i.$$

3) Sur le segment z_1z_3 on a $y = 0$, $dy = 0$, $0 \leqslant x \leqslant 1$. Sur le segment z_3z_2 on a $x = 1$, $dx = 0$, $0 \leqslant y \leqslant 1$. En utilisant la propriété de linéarité des intégrales curvilignes, on obtient

$$\int_C (1+i-2\bar{z})\,dz = \int_{z_1z_3} (1+i-2\bar{z})\,dz + \int_{z_3z_2} (1+i-2\bar{z})\,dz =$$

$$=\int_0^1 (1-2x)\,dx+i\int_0^1 dx-\int_0^1 (1+2y)\,dy+i\int_0^1 (1-2\cdot 1)\,dy=-2.$$

Cet exemple montre que l'intégrale d'une fonction continue qui n'est pas analytique dépend, généralement parlant, de la configuration du chemin d'intégration.

EXEMPLE 2. Calculer l'intégrale

$$\int_C (z^2+z\bar{z})\,dz,$$

où C est l'arc de cercle $|z| = 1$ $(0 \leqslant \operatorname{Arg} z \leqslant \pi)$.

SOLUTION. Posons $z = e^{i\varphi}$. Alors $dz = ie^{i\varphi}\,d\varphi$ et

$$\int_C (z^2+z\bar{z})\,dz=\int_0^\pi ie^{i\varphi}\,(e^{i2\varphi}+1)\,d\varphi=$$

$$=i\int_0^\pi (e^{i3\varphi}+e^{i\varphi})\,d\varphi=\left(\frac{1}{3}e^{i3\varphi}+e^{i\varphi}\right)\Big|_0^\pi=-\frac{8}{3}.$$

EXEMPLE 3. Calculer l'intégrale $\int\limits_C e^{\bar{z}}\,dz$, où C est le segment de la droite $y = -x$ qui relie les points $z_1 = 0$ et $z_2 = \pi - i\pi$.

SOLUTION. Les équations paramétriques de la ligne C s'écrivent

$$x = t, \qquad y = -t$$

ou bien, sous forme complexe,

$$z = t - it,$$

où la variable réelle t varie de 0 à π.

En appliquant la formule (2), on obtient

$$\int_C e^{\bar{z}}\,dz=\int_0^\pi e^{t+it}\,(1-i)\,dt=(1-i)\int_0^\pi e^{(1+i)t}\,dt=\frac{1-i}{1+i}\,e^{(1+i)t}\Big|_0^\pi=(e^\pi+1)\,i.$$

EXEMPLE 4. Calculer l'intégrale

$$\int_{1-i}^{2+i} (3z^2+2z)\,dz.$$

SOLUTION. Etant donnée que la fonction $f(z) = 3z^2 + 2z$ figurant sous le signe d'intégration est analytique partout, l'application de la formule de Newton-Leibniz donne

$$\int_{1-i}^{2+i} (3z^2+2z)\,dz=(z^3+z^2)\Big|_{1-i}^{2+i}=$$

$$=(2+i)^3+(2+i)^2-(1-i)^3-(1-i)^2=7+19i.$$

EXEMPLE 5. Calculer l'intégrale

$$\int_0^i z\cos z\,dz.$$

SOLUTION. Les fonctions $f(z) = z$ et $\varphi(z) = \cos z$ sont partout analytiques. En appliquant la formule d'intégration par parties, on obtient

$$\int_0^i z\cos z\,dz = \int_0^i z(\sin z)'\,dz = (z\sin z)\Big|_0^i - \int_0^i \sin z\,dz =$$

$$= i\sin i + \cos z\Big|_0^i = -\operatorname{sh} 1 + \operatorname{ch} 1 - 1 = \frac{1-e}{e}$$

BRANCHES UNIFORMES D'UNE FONCTION MULTIFORME. POINTS DE RAMIFICATION

Soit $w = f(z)$ une fonction analytique dans un domaine D et supposons qu'elle applique le domaine D sur un domaine G et que la fonction réciproque $z = \varphi(w)$ soit multiforme dans le domaine G. Si dans le domaine G il existe des fonctions uniformes analytiques $z = \varphi_1(w)$, $z = \varphi_2(w)$, . . . pour lesquelles la fonction $w = f(z)$ est une fonction réciproque, on dit alors que les fonctions $\varphi_1(w)$, $\varphi_2(w)$, . . . sont des *branches uniformes de la fonction* $\varphi(w)$ définies dans le domaine G.

Par exemple, la fonction $w = z^n$ associe à chaque point z_0 un seul point w_0, mais à un seul et même point w_0 ($w \neq 0$, $w \neq \infty$) la fonction $z = \sqrt[n]{w}$ fait correspondre n points distincts du plan des z; de plus, si $w = \rho e^{i\theta}$, ces n valeurs de z sont données par la formule $z_k = re^{i\varphi_k}$, où

$$r = \sqrt[n]{\rho}, \quad \varphi_k = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \quad (-\pi < \theta \leqslant \pi, \ k = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

Soit un domaine simplement connexe G qui contient le point w_0 mais qui ne contient pas les points $w = 0$ et $w = \infty$. Dans ce cas, pour le même choix du nombre θ_0 (par exemple, $\theta_0 = \operatorname{Arg} w_0$), aux différentes valeurs fixées de k ($k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$) il correspond différentes branches de la fonction $z = \sqrt[n]{w}$.

Si, en contournant un point dans un voisinage suffisamment petit, on assiste au passage d'une branche de la fonction multiforme à une autre branche, on a affaire à un *point de ramification* de la fonction multiforme examinée. La fonction $\sqrt[n]{w}$ a comme points de ramification les points $w = 0$ et $w = \infty$.

Après avoir contourné n fois le point $w = 0$, on revient à la branche initiale de la fonction $\sqrt[n]{w}$; les points de ramification qui jouissent de cette propriété sont appelés points de ramification *algébriques* d'ordre $n - 1$. En chacun de ces points, la fonction ne prend qu'une valeur unique: $\sqrt[n]{0} = 0$, $\sqrt[n]{\infty} = \infty$, ce qui signifie qu'à ces points les différentes branches de la fonction coïncident.

Pour la fonction logarithmique $w = \operatorname{Ln} z$, on a comme points de ramification $z = 0$ et $z = \infty$, de plus, $\operatorname{Ln} 0 = \infty$ et $\operatorname{Ln} \infty = \infty$. En contournant (dans le même sens) le point $z = 0$ n'importe quel nombre fini de fois, on ne revient jamais à la branche initiale de la fonction $\operatorname{Ln} z$. Les points de ramification de ce genre sont appelés points de ramification *logarithmiques*. Lors de l'intégration, il faut procéder à la séparation d'une branche d'une fonction multiforme. Cela

s'obtient en donnant la valeur de la fonction multiforme en un certain point du contour d'intégration.

Si le contour d'intégration C est fermé, on considère comme point de départ z_0 du chemin d'intégration le point auquel est donnée la valeur de la fonction figurant sous le signe d'intégration.

EXEMPLE 6. Calculer l'intégrale

$$\int_C \frac{dz}{\sqrt{z}},$$

où C est l'arc supérieur du cercle $|z| = 1$. Pour $\sqrt{z}$, on considère la branche pour laquelle $\sqrt{1} = -1$.

SOLUTION. PREMIÈRE MÉTHODE. La fonction $\sqrt{z}$ possède deux déterminations:

$$\sqrt{z} = \sqrt{|z|}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right),$$

$$\sqrt{z} = \sqrt{|z|}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right)\right] =$$

$$= -|z|\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right),$$

où $\varphi = \operatorname{Arg} z$.

Etant donné que les valeurs de z sont prises sur le cercle unité, alors $|z| = 1$ et, par conséquent,

$$\sqrt{z} = \cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}, \quad \sqrt{z} = -\cos\frac{\varphi}{2} - i\sin\frac{\varphi}{2}.$$

La deuxième détermination satisfait à la condition $\sqrt{1} = -1$

$$\sqrt{z} = -\cos\frac{\varphi}{2} - i\sin\frac{\varphi}{2}. \tag{4}$$

En effet, soit $z = 1$. Alors $\operatorname{Arg} z = 0$ et

$$\sqrt{1} = -\cos 0 - i\sin 0 = -1.$$

D'après la formule de Newton-Leibniz, on obtient

$$\int_C \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int_1^{-1} \frac{dz}{\sqrt{z}} = 2\sqrt{z}\,\Big|_1^{-1} = 2\left(\sqrt{-1} - \sqrt{1}\right).$$

En posant $z = -1$ dans la formule (4), on trouve

$$\sqrt{-1} = -\left[\cos\frac{\operatorname{Arg}(-1)}{2} + i\sin\frac{\operatorname{Arg}(-1)}{2}\right] =$$

$$= -\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = -i.$$

Conformément au choix de la branche, on a $\sqrt{1} = -1$ et finalement on obtient

$$\int_C \frac{dz}{\sqrt{z}} = 2(1-i).$$

DEUXIÈME MÉTHODE. On pose $z = \rho e^{i\varphi}$, où $\rho = 1$, alors que φ varie de 0 à π. De la condition $\sqrt{1} = -1$ il découle que $\sqrt{e^{i\varphi}} = e^{i\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right)}$. Donc

$$\int_C \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int_0^{\pi} \frac{ie^{i\varphi}}{\sqrt{e^{i\varphi}}}d\varphi = \int_0^{\pi} \frac{ie^{i\varphi}\,d\varphi}{e^{i\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right)}} = \int_0^{\pi} ie^{i\left(\frac{\varphi}{2}-\pi\right)}\,d\varphi =$$

$$= 2e^{i\left(\frac{\varphi}{2}-\pi\right)}\Big|_0^{\pi} = 2\left(e^{-i\frac{\pi}{2}} - e^{-i\pi}\right) = 2(1-i).$$

EXEMPLE 7. Calculer l'intégrale $I = \int_1^i \frac{\ln^3 z}{z}dz$ prise le long de l'arc du cercle $|z| = 1$ ($\ln z$ est la détermination principale du logarithme, $\ln 1 = 0$).

SOLUTION. PREMIÈRE MÉTHODE. En appliquant la formule de Newton-Leibniz, on obtient

$$I = \int_1^i \frac{\ln^3 z}{z}\,dz = \int_1^i \ln^3 z\,d(\ln z) = \frac{\ln^4 z}{4}\Big|_1^i =$$

$$= \frac{\ln^4 i - \ln^4 1}{4} = \frac{\ln^4 i}{4} = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi i}{2}\right)^4 = \frac{\pi^4}{64}.$$

DEUXIÈME MÉTHODE. On effectue le changement de variable

$$\ln z = w, \quad dw = \frac{dz}{z}.$$

L'arc du cercle $|z| = 1$ devient le segment de l'axe imaginaire compris entre les points $(0, 0)$ et $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

L'intégrale prend alors la forme

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}i} w^3\,dw = \frac{w^4}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}i} = \frac{1}{4}\,\frac{\pi^4 i^4}{2^4} = \frac{\pi^4}{64}.$$

TROISIÈME MÉTHODE. Posons $z = e^{i\varphi}$ (ici $\rho = |z| = 1$). Alors

$$\ln z = i\varphi, \qquad dz = ie^{i\varphi}\,d\varphi.$$

La variable réelle φ varie dans les limites $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$. Dans ce cas, on obtient

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{i^3\varphi^3 e^{i\varphi} i\,d\varphi}{e^{i\varphi}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi^3\,d\varphi = \frac{\varphi^4}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^4}{64}.$$

Calculer les intégrales suivantes:

140. $\int_C z \operatorname{Im} z^2\, dz$, C: $|z| = 1$ $(-\pi \operatorname{Arg} z \leqslant 0)$.

141. $\int_C e^{|z|^2} \operatorname{Re} z\, dz$, C est la droite qui relie les points $z_1 = 0$, $z_2 = 1 + i$.

142. $\int_C \ln z\, dz$ ($\ln z$ est la détermination principale du logarithme), C: $|z| = 1$, a) le point de départ du chemin d'intégration $z_0 = 1$; b) $z_0 = -1$. Le chemin d'intégration est parcouru dans le sens antihoraire.

143. $\int_C z \operatorname{Re} z\, dz$, C: $|z| = 1$. Le chemin d'intégration est parcouru dans le sens antihoraire.

144. $\int_C z\bar{z}\, dz$, C: $|z| = 1$. Le chemin d'intégration est parcouru dans le sens antihoraire.

145. $\int_1^i z e^z\, dz$.

146. $\int_C \operatorname{Re} z\, dz$, C: a) $z = (2 + i)\, t$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$; b) une ligne polygonale constituée du segment $[0, 2]$ de l'axe réel et du segment qui relie les points $z_1 = 2$ et $z_2 = 2 + i$.

147. $\int_{1+i}^{-1-i} (2z + 1)\, dz$. **148.** $\int_0^{i+1} z^3\, dz$. **149.** $\int_1^i (3z^4 - 2z^3)\, dz$.

150. $\int_C e^{z}\, dz$, C: a) l'arc de la parabole $y = x^2$ qui relie les points $z_1 = 0$ et $z_2 = 1 + i$; b) le segment de droite reliant les mêmes points.

151. $\int_C \cos z\, dz$, C: le segment de droite reliant les points $z_1 = \frac{\pi}{2}$ et $z_2 = \pi + i$.

152. $\int_C \frac{dz}{\sqrt{z}}$, C: a) la demi-circonférence supérieure $|z| = 1$; on choisit la branche de la fonction $\sqrt{z}$ pour laquelle $\sqrt{1} = 1$; b) $|z| = 1$, $\operatorname{Re} z \geqslant 0$; $\sqrt{-i} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)$.

153. $\int\limits_C \frac{dz}{\sqrt[4]{z^3}}$, C: la demi-circonférence supérieure $|z|=1$; on considère la branche de la fonction $w=\sqrt[4]{z^3}$ pour laquelle $\sqrt[4]{1}=1$.

154. $\int\limits_{1+i}^{2i} (z^3-z)\, e^{\frac{z^2}{2}}\, dz$. 155. $\int\limits_0^i z \cos z\, dz$.

156. $\int\limits_1^i z \sin z\, dz$. 157. $\int\limits_0^i (z-i)\, e^{-z}\, dz$.

158. $\int\limits_1^i \frac{\ln (z+1)}{z+1}\, dz$ le long de l'arc de cercle $|z|=1$, $\operatorname{Im} z \geqslant 0$, $\operatorname{Re} z \geqslant 0$.

159. $\int\limits_1^i \frac{\ln z}{z}\, dz$ le long du segment de droite qui relie les points $z_1=1$ et $z_2=i$.

160. $\int\limits_0^{1+i} \sin z \cos z\, dz$.

161. $\int\limits_1^i \frac{1+\operatorname{tg}^2 z}{\cos^2 z}\, dz$ le long de la droite qui relie les points $z_1=1$ et $z_2=i$.

162. $\int\limits_{-1}^i \frac{\cos z\, dz}{\sqrt{\sin z}}$ le long de la droite qui relie les points $z_1=$ $=-1$ et $z_2=i$; on choisit la branche de la fonction $\sqrt{\sin z}$ pour laquelle $\sqrt{\sin(-1)}=i\sqrt{\sin 1}$.

163. $\int\limits_C \operatorname{Re} (\sin z) \cos z\, dz$, C: $|\operatorname{Im} z| \leqslant 1$, $\operatorname{Re} z=\frac{\pi}{4}$.

164. $\int\limits_C z \operatorname{Im} (z^2)\, dz$, C: $|\operatorname{Im} z| \leqslant 1$, $\operatorname{Re} z=1$.

165. $\int\limits_{-i}^i z e^{z^2}\, dz$.

166. $\int\limits_C \operatorname{tg} z\, dz$, C: l'arc de la parabole $y=x^2$ reliant les points $z=0$ et $z=1+i$.

§ 6. Formule intégrale de Cauchy

Si une fonction $f(z)$ est analytique dans un domaine D borné par un contour C fermé lisse par morceaux et sur ce contour lui-même, la formule intégrale de Cauchy est alors vérifiée

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)\,dz}{z-z_0} \quad (z_0 \in D), \tag{1}$$

où le contour C est parcouru de manière que le domaine D se trouve constamment à gauche.

La formule intégrale de Cauchy donne la possibilité de calculer certaines intégrales.

EXEMPLE 1. Calculer l'intégrale

$$\int_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} iz}{z^2+4z+3}\,dz.$$

SOLUTION. A l'intérieur de la circonférence $|z| = 2$, le dénominateur s'annule au point $z_0 = -1$. Pour avoir la possibilité d'utiliser la formule (1), mettons l'intégrale sous la forme

$$\int_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} iz}{z^2+4z+3}\,dz=\int_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} iz}{(z+1)(z+3)}\,dz=\int_{|z|=2} \frac{\frac{\operatorname{ch} iz}{z+3}}{z-(-1)}\,dz.$$

Ici $z_0=-1$ et la fonction $f(z)=\dfrac{\operatorname{ch} iz}{z+3}$ est analytique dans le disque $|z| \leqslant 2$. Pour cette raison,

$$\int_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} iz}{z^2+4z+3}\,dz=2\pi i f(-1)=2\pi i\,\frac{\operatorname{ch}(-i)}{2}=\pi i \operatorname{ch} i=\pi i \cos 1.$$

EXEMPLE 2. En utilisant la formule intégrale de Cauchy, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_C \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}\,dz$ si :

1) C: $|z-2| = 1$; 2) C: $|z-2| = 3$; 3) C: $|z-2| = 5$.

SOLUTION. 1) Dans le domaine fermé borné par la circonférence $|z-2| = 1$ la fonction sous le signe d'intégration est analytique, ce qui permet d'écrire, en vertu du théorème de Cauchy,

$$\int_{|z-2|=1} \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}\,dz=0.$$

2) A l'intérieur du domaine borné par la circonférence $|z-2| = 3$ il y a un point $z = 0$ où le dénominateur s'annule. Ecrivons l'intégrale comme suit

$$\int_C \frac{e^{z^2}}{z-6z}\,dz=\int_{|z-2|=3} \frac{\frac{e^{z^2}}{z-6}}{z}\,dz.$$

La fonction $f(z) = \dfrac{e^{z^2}}{z-6}$ est analytique dans le domaine considéré. D'après

la formule intégrale de Cauchy ($z_0 = 0$), on obtient

$$\int\limits_{|z-2|=3} \frac{e^{z^2}}{z-6z}\,dz = 2\pi i\,\frac{e^{z^2}}{z-6}\Bigg|_{z=0} = 2\pi i\left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{\pi i}{3}.$$

3) Dans le domaine borné par la circonférence $|z-2| = 5$ il y a deux points $z = 0$, $z = 6$ où le dénominateur de la fonction sous le signe d'intégration s'annule. La formule (1) ne peut pas être immédiatement appliquée. Dans ce cas, l'intégrale peut être calculée de la façon suivante.

PREMIÈRE MÉTHODE. En décomposant la fraction $\frac{1}{z^2-6z}$ en fractions simples, on obtient

$$\frac{1}{z^2-6z} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{z-6} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{z}$$

et en substituant dans l'intégrale, on a

$$\int\limits_{|z-2|=5} \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}\,dz = \frac{1}{6}\times$$

$$\times \int\limits_{|z-2|=5} \frac{e^{z^2}\,dz}{z-6} - \frac{1}{6}\int\limits_{|z-2|=5} \frac{e^{z^2}\,dz}{z} =$$

$$= \frac{1}{6}\,2\pi i e^{36} - \frac{1}{6}\,2\pi i = \frac{e^{36}-1}{3}\,\pi i.$$

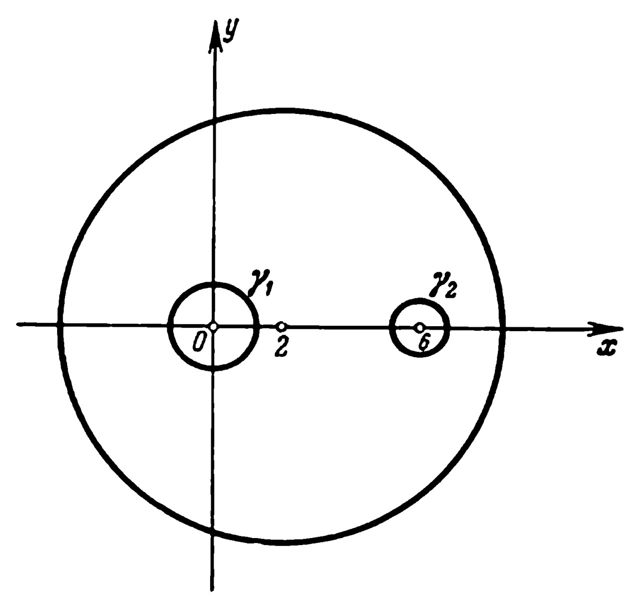


Fig. 6.

DEUXIÈME MÉTHODE. Construisons les circonférences γ_1 et γ_2 de centres aux points $z = 0$ et $z = 6$ et de rayons suffisamment petits pour qu'elles ne se coupent pas tout en restant entièrement à l'intérieur du disque $|z-2| \leqslant 5$ (fig. 6).

La fonction figurant sous le signe d'intégration est analytique en tout point du domaine triplement connexe borné par les circonférences $|z-2| = 5$, γ_1 et γ_2. D'après le théorème de Cauchy, pour un domaine multiplement connexe, on a

$$\int\limits_{|z-2|=5} \frac{e^{z^2}\,dz}{z^2-6z} = \int\limits_{\gamma_1} \frac{e^{z^2}\,dz}{z^2-6z} + \int\limits_{\gamma_2} \frac{e^{z^2}\,dz}{z^2-6z}.$$

La formule intégrale de Cauchy (1) peut être appliquée à chacune des intégrales du second membre et l'on obtient

$$\int\limits_{|z-2|=5} \frac{e^{z^2}\,dz}{z^2-6z} = 2\pi i\,\frac{e^{z^2}}{z-6}\Bigg|_{z=0} + 2\pi i\,\frac{e^{z^2}}{z}\Bigg|_{z=6} = \frac{e^{36}-1}{3}\,\pi i.$$

Calculer les intégrales suivantes à l'aide de la formule intégrale de Cauchy (toutes les circonférences sont parcourues dans le sens antihoraire):

167. $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2+2z}\,dz.$ **168.** $\displaystyle\int\limits_{|z-i|=1} \frac{e^{iz}}{z^2+1}\,dz.$

169. $\displaystyle\int\limits_{|z-1|=2} \frac{\sin\frac{\pi z}{2}}{z^2+2z-3}\,dz.$ **170.** $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{\sin iz}{z^2-4z+3}\,dz.$

171. $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} \frac{\operatorname{tg} z}{ze^{1/(z+2)}}\,dz.$ **172.** $\displaystyle\int\limits_{|z|=3} \frac{\cos(z+\pi i)}{z(e^z+2)}\,dz.$

173. $\displaystyle\int\limits_{|z|=5} \frac{dz}{z^2+16}.$ **174.** $\displaystyle\int\limits_{|z|=4} \frac{dz}{(z^2+9)(z+9)}.$

175. $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} \frac{\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}(z+i)}{z^2-2z}.$ **176.** $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{\sin z\sin(z-1)}{z^2-z}\,dz.$

Si une fonction $f(z)$ est analytique dans un domaine D et sur sa frontière C, pour tout nombre naturel n, est valable la formule

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{n+1}}, \qquad (2)$$

où $z_0 \in D$, $z \in C$. La formule (2) peut être utilisée pour calculer certaines intégrales.

EXEMPLE 3. Calculer l'intégrale

$$\int\limits_{|z-1|=1} \frac{\sin\pi z}{(z^2-1)^2}\,dz.$$

SOLUTION. La fonction $\frac{\sin\pi z}{(z^2-1)^2}$ est analytique partout dans le domaine $|z-1| \leqslant 1$ sauf au point $z_0 = 1$. Séparons sous le signe d'intégration une fonction $f(z)$ qui soit analytique dans le disque $|z-1| \leqslant 1$. Pour ce faire, récrivons la fonction figurant sous le signe d'intégration:

$$\frac{\sin\pi z}{(z^2-1)^2}=\frac{\dfrac{\sin\pi z}{(z+1)^2}}{(z-1)^2},$$

et prenons en qualité de $f(z)$ l'expression $\frac{\sin\pi z}{(z+1)^2}$. Posons $n = 1$ dans la formule (2). On obtient ainsi

$$\int\limits_{|z-1|=1} \frac{\dfrac{\sin\pi z}{(z+1)^2}}{(z-1)^2}\,dz=2\pi i f'(1).$$

On trouve la dérivée

$$f'(z)=\left(\frac{\sin\pi z}{(z+1)^2}\right)'=\frac{\pi\cos\pi z\cdot(z+1)-2\sin\pi z}{(z+1)^3}.$$

D'ici

$$f'(1)=\frac{2\pi\cos\pi}{2^3}=-\frac{\pi}{4}.$$

Par conséquent,

$$\int\limits_{|z-1|=1} \frac{\sin \pi z}{(z^2-1)^2}\, dz = -\frac{\pi^2}{2} i.$$

EXEMPLE 4. Calculer l'intégrale

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} z\, dz}{(z+1)^3 (z-1)}.$$

SOLUTION. PREMIÈRE MÉTHODE. Le dénominateur $(z+1)^3 (z-1)$ de la fonction sous le signe d'intégration s'annule en deux points $z_1 = -1$, $z_2 = 1$ situés à l'intérieur du disque $|z| \leqslant 2$. Décomposons en fractions simples la fonction

$$\frac{1}{(z+1)^3 (z-1)} = \frac{1}{8}\,\frac{1}{z-1} - \frac{1}{8}\,\frac{1}{z+1} - \frac{1}{4}\,\frac{1}{(z+1)^2} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{(z+1)^3}.$$

En vertu de la linéarité de l'intégrale, on a

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} z}{(z+1)^3 (z-1)}\, dz = \frac{1}{8} \int\limits_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} z\, dz}{z-1} - \frac{1}{8} \int\limits_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} z}{z+1}\, dz -$$

$$-\frac{1}{4} \int\limits_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} z}{(z+1)^2}\, dz - \frac{1}{2} \int\limits_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} z}{(z+1)^3}\, dz.$$

Appliquons la formule intégrale de Cauchy (1) aux premières deux intégrales:

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} z}{z-1}\, dz = 2\pi i \operatorname{ch} 1, \qquad \int\limits_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} z}{z+1}\, dz = 2\pi i \operatorname{ch} 1.$$

La troisième et la quatrième intégrales sont calculées à l'aide de la formule (2):

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} z}{(z+1)^2}\, dz = 2\pi i\, (\operatorname{ch} z)' \,|_{z=-1} = -2\pi i \operatorname{sh} 1.$$

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} z}{(z+1)^3}\, dz = \frac{2\pi i}{2!}\, (\operatorname{ch} z)'' \,|_{z=-1} = \pi i \operatorname{ch} 1.$$

Finalement, on a

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} z\, dz}{(z+1)^3 (z-1)} = \frac{2\pi i \operatorname{ch} 1}{8} - \frac{2\pi i \operatorname{ch} 1}{8} + \frac{1}{4}\, 2\pi i \operatorname{sh} 1 - \frac{1}{2}\, \pi i \operatorname{ch} 1 =$$

$$= \frac{\operatorname{sh} 1 - \operatorname{ch} 1}{2}\, \pi i = -\frac{\pi i}{2e}.$$

DEUXIÈME MÉTHODE. Construisons les circonférences γ_1 et γ_2 de centres aux points $z_1 = -1$ et $z_2 = 1$ et de rayons suffisamment petits pour qu'elles ne se coupent pas tout en restant entièrement à l'intérieur du disque $|z| \leqslant 2$. La fonction figurant sous le signe d'intégration est analytique en tout point du domaine triplement connexe borné par les circonférences $|z| = 2$, γ_1 et γ_2. D'après le théorème de Cauchy, pour un domaine multiplement connexe, on a

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} z\, dz}{(z+1)^3 (z-1)} = \int\limits_{\gamma_1} \frac{\operatorname{ch} z\, dz}{(z+1)^3 (z-1)} + \int\limits_{\gamma_2} \frac{\operatorname{ch} z\, dz}{(z+1)^3 (z-1)}. \qquad (3)$$

Appliquons la formule (2) à la première intégrale du second membre (3) en mettant préalablement la fonction figurant sous le signe d'intégration sous la forme

$$\frac{\operatorname{ch} z}{(z+1)^3(z-1)}=\frac{\dfrac{\operatorname{ch} z}{z-1}}{(z+1)^3}.$$

La fonction $\dfrac{\operatorname{ch} z}{z-1}$ est analytique à l'intérieur de γ_1 et, en vertu de la formule (2), on a

$$\int_{\gamma_1}\frac{\operatorname{ch} z\,dz}{(z+1)^3(z-1)}=\int_{\gamma_1}\frac{\dfrac{\operatorname{ch} z}{z-1}}{(z+1)^3}\,dz=\frac{2\pi i}{2!}\left(\frac{\operatorname{ch} z}{z-1}\right)''\bigg|_{z=-1}=-\frac{2e^{-1}+\operatorname{ch} 1}{4}\,\pi i.$$

Appliquons la formule intégrale de Cauchy (1) à la deuxième intégrale du second membre (3)

$$\int_{\gamma_2}\frac{\operatorname{ch} z\,dz}{(z+1)^3(z-1)}=\int_{\gamma_2}\frac{\dfrac{\operatorname{ch} z}{(z+1)^3}}{z-1}\,dz=2\pi i\,\frac{\operatorname{ch} z}{(z+1)^3}\bigg|_{z=1}=\pi i\,\frac{\operatorname{ch} 1}{4}.$$

Finalement, on obtient

$$\int_{|z|=2}\frac{\operatorname{ch} z\,dz}{(z+1)^3(z-1)}=-\pi i\,\frac{2e^{-1}+\operatorname{ch} 1}{4}+\pi i\,\frac{\operatorname{ch} 1}{4}=-\frac{\pi i}{2e}.$$

Calculer les intégrales suivantes:

177. $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{\cos z}{z^3}\,dz.$

178. $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{\operatorname{sh}^2 z}{z^3}\,dz.$

179. $\displaystyle\int_{|z-1|=1}\frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{(z-1)^2(z-3)}\,dz.$

180. $\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{z\operatorname{sh} z}{(z^2-1)^2}\,dz.$

181. $\displaystyle\int_{|z-3|=6}\frac{z\,dz}{(z-2)^3(z+4)}.$

182. $\displaystyle\int_{|z-2|=3}\frac{\operatorname{ch} e^{i\pi z}}{z^3-4z^2}\,dz.$

183. $\displaystyle\int_{|z|=1/1}\frac{1}{z^3}\cos\frac{\pi}{z+1}\,dz.$

184. $\displaystyle\int_{|z-2|=1}\frac{e^{\frac{1}{z}}}{(z^2+4)^2}\,dz.$

185. $\displaystyle\int_{|z|=1/2}\frac{1-\sin z}{z^2}\,dz.$

186. $\displaystyle\int_{|z-1|=1/2}\frac{e^{iz}}{(z^2-1)^2}\,dz.$

§ 7. Séries dans le domaine complexe

Soit la série à termes complexes

$$z_1+z_2+\ldots+z_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} z_n, \tag{1}$$

où $z_n = x_n + iy_n$.

La série (1) converge si, et seulement si, les deux séries suivantes convergent elles aussi :

$$x_1+x_2+\ldots+x_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} x_n, \tag{2}$$

$$y_1+y_2+\ldots+y_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} y_n. \tag{3}$$

La série (1) est dite absolument convergente si la série

$$|z_1|+|z_2|+\ldots+|z_n|+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| \tag{4}$$

converge.

Les séries (2), (3), (4) sont des séries à termes réels et leur convergence est déterminée d'après les critères bien connus de convergence des séries dans le domaine réel.

EXEMPLE 1. Etudier la convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n^2}.$$

SOLUTION. On a $e^{in} = \cos n + i \sin n$. De cette façon, le problème de la convergence de la série considérée se ramène à l'étude de la convergence des séries à termes réels:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}.$$

Etant donné que chacune de ces séries converge absolument, la série donnée est absolument convergente.

EXEMPLE 2. Etudier la convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i\frac{\pi}{n}}}{n}.$$

SOLUTION. On a

$$e^{i\frac{\pi}{n}}=\cos\frac{\pi}{n}+i\sin\frac{\pi}{n}.$$

La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{\pi}{n}}{n}$ diverge, alors que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n}$ converge. Cela signifie que la série donnée est divergente.

Etudier la convergence des séries suivantes:

187. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos in}{2^n}$.
188. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin in}{3^n}$.
189. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos in^2}{5^{n^2}}$.

190. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i2n}}{n\sqrt{n}}$.
191. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i\frac{\pi}{n}}}{\sqrt{n}}$.
192. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{2^{\frac{n}{2}} \cos in}$.

193. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} i\sqrt{n}}{\sin in}$.
194. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\operatorname{sh} in}$.
195. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} i\frac{\pi}{n}}{n^{\ln n}}$.

196. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\operatorname{tg} i\pi n}$.

SÉRIE ENTIÈRE

Une série de la forme

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \tag{5}$$

où c_0, c_1, etc. sont des constantes complexes, alors que z est une variable complexe, est appelée *série entière* dans le domaine complexe.

THÉORÈME D'ABEL. *Si la série entière* (5) *converge pour une certaine valeur* $z = z_0$, *alors elle converge, et de plus absolument, pour toutes les valeurs de* z *telles que* $|z| < |z_0|$. *Si la série* (5) *diverge pour* $z = z_1$, *elle diverge également pour tout* z *si* $|z| > |z_1|$.

Le domaine de convergence de la série (5) est représenté par un disque centré sur l'origine des coordonnées.

Le rayon de convergence d'une série entière est donné par la formule

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} \quad (c_n \neq 0) \tag{6}$$

ou

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} \tag{7}$$

si les limites indiquées existent.

EXEMPLE 3. Déterminer le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{n=0}^{\infty} \cos in \cdot z^n.$$

SOLUTION. On a

$$c_n = \cos in = \frac{e^{-n} + e^n}{2} = \operatorname{ch} n.$$

Pour trouver le rayon de convergence R, on utilise la formule (6):

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{|\operatorname{ch} n|}{|\operatorname{ch}(n+1)|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{ch}(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{ch} n\cdot\operatorname{ch} 1+\operatorname{sh} n\cdot\operatorname{sh} 1}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\operatorname{ch} 1+\operatorname{th} n\cdot\operatorname{sh} 1}=\frac{1}{\operatorname{ch} 1+\operatorname{sh} 1}=e^{-1},$$

puisque

$$\lim_{n\to\infty}\operatorname{th} n=\lim_{n\to\infty}\frac{e^n+e^{-n}}{e^n-e^{-n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+e^{-2n}}{1-e^{-2n}}=1.$$

De cette façon, le rayon de convergence de la série entière donnée sera $R=e^{-1}$.

EXEMPLE 4. Trouver le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{n=0}^{\infty}(1+i)^n z^n.$$

SOLUTION. On trouve le module du coefficient $c_n=(1+i)^n$:

$$|c_n|=|(1+i)^n|=|1+i|^n=(\sqrt{2})^n=2^{n/2}.$$

A l'aide de la formule (7), on trouve le rayon de convergence de la série entière considérée

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{2^{n/2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Trouver les rayons de convergence des séries entières suivantes:

197. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{in}z^n$. **198.** $\sum_{n=1}^{\infty} e^{i\frac{\pi}{n}}z^n$. **199.** $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{1-i}\right)^n$.

200. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{in}\right)^n$. **201.** $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{ch}\frac{i}{n}\,z^n$. **202.** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{\ln in}\right)^n$.

203. $\sum_{n=0}^{\infty} i^n z^n$. **204.** $\sum_{n=1}^{n}\sin\frac{\pi i}{n}\,z^n$. **205.** $\sum_{n=1}^{\infty}\cos^n\frac{\pi i}{\sqrt{n}}z^n$.

206. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{\sin^n(1+in)}$. **207.** $\sum_{n=0}^{\infty}(n+i)\,z^n$. **208.** $\sum_{n=0}^{\infty}\cos in\cdot z^n$.

209. Le rayon de convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n$ est égal à r, tandis que celui de la série $\sum_{n=0}^{\infty}c_n' z^n$ est r'.

Porter une estimation sur les rayons de convergence des

séries suivantes :

a) $\sum_{n=0}^{\infty}(c_n+c'_n)\,z^n$; b) $\sum_{n=0}^{\infty}(c_n-c'_n)\,z^n$; c) $\sum_{n=0}^{\infty}c_nc'_nz^n$;

d) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{c'_n}\,z^n$ $(c'_n\neq 0)$.

SÉRIES DE TAYLOR ET DE LAURENT

Une fonction $f(z)$ uniforme et analytique au point $z=z_0$ est développable dans le voisinage de ce point en série entière de Taylor

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n, \tag{8}$$

dont les coefficients sont calculés d'après les formules

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{n+1}}=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \tag{9}$$

où Γ est une circonférence de centre au point $z=z_0$ située entièrement dans le voisinage du point z_0 où la fonction $f(z)$ est analytique. Le centre de la circonférence du disque de convergence se situe au point z_0 ; cette circonférence passe par le point singulier ζ de la fonction $f(z)$ le plus proche du point z_0, ce qui signifie que le rayon de convergence de la série (8) sera égal à la distance qui sépare le point z_0 du point singulier le plus proche de la fonction $f(z)$.

Pour les fonctions

$$\ln(1+z),\qquad (1+z)^{\alpha}$$

les développements en série de Taylor au voisinage du point $z_0=0$ s'écrivent

$$\ln(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}+\ldots\qquad (R=1), \tag{10}$$

$$(1+z)^{\alpha}=1+\alpha z+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}z^3+\ldots$$

$$\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha+n-1)}{n!}z^n+\ldots\qquad (R=1). \tag{11}$$

En particulier, pour $\alpha=-1$, on obtient

$$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-\ldots+(-1)^n z^n+\ldots\qquad (R=1). \tag{12}$$

La formule (10) représente le développement taylorien de la détermination principale du logarithme au voisinage du point $z=0$; pour obtenir la série de Taylor pour les autres déterminations de la fonction multiforme $\mathrm{Ln}\,(1+z)$, il faut ajouter à la série (10) les nombres $2n\pi i$, $n=\pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$:

$$\mathrm{Ln}\,(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\ldots+2n\pi i.$$

EXEMPLE 5. Développer en série de Taylor au voisinage du point $z_0=0$

la fonction

$$f(z)=\frac{z}{z^2-2z-3}$$

en utilisant le développement (12) et trouver le rayon de convergence de cette série.

SOLUTION. Décomposons la fonction donnée en fractions simples

$$\frac{z}{z^2-2z-3}=\frac{1}{4}\,\frac{1}{z+1}+\frac{3}{4}\,\frac{1}{z-3}.$$

Transformons maintenant le second membre comme suit:

$$f(z)=\frac{1}{4}\,\frac{1}{1+z}-\frac{1}{4}\,\frac{1}{1-\frac{z}{3}}.$$

D'après le développement (12) de la fonction $\frac{1}{1+z}$, on obtient

$$f(z)=\frac{1}{4}(1-z+z^2-z^3+\ldots)-\frac{1}{4}\left(1+\frac{z}{3}+\frac{z^2}{9}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(-\frac{4}{3}z+\frac{8}{9}z^2-\frac{28}{27}z^3+\ldots\right)=-\frac{z}{3}+\frac{2}{3^2}z^2-\frac{7}{3^3}z^3+\ldots$$

Pour la fonction donnée, le point singulier le plus proche du point $z_0=0$ est $z=-1$. Pour cette raison, le rayon de convergence de la série obtenue sera $R=1$.

EXEMPLE 6. Développer suivant les puissances de la différence $z-3$ la fonction

$$f(z)=\frac{1}{3-2z}.$$

SOLUTION. Transformons la fonction donnée de la façon suivante:

$$\frac{1}{3-2z}=\frac{1}{3-2(z-3+3)}=\frac{1}{-3-2(z-3)}=-\frac{1}{3}\,\frac{1}{1+\frac{2}{3}(z-3)}.$$

En substituant dans le développement (12) $\frac{2}{3}(z-3)$ à z, on obtient

$$\frac{1}{3-2z}=-\frac{1}{3}\left[1-\frac{2}{3}(z-3)+\frac{2^2}{3^2}(z-3)^2-\frac{2^3}{3^3}(z-3)^3+\ldots\right]=$$

$$=-\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}(z-3)-\frac{2^2}{3^3}(z-3)^2+\frac{2^3}{3^4}(z-3)^3-\ldots$$

Cette série converge à condition que

$$\left|\frac{2}{3}(z-3)\right|<1,$$

ou si $|z-3|<\frac{3}{2}$, donc, le rayon de convergence de la série sera $R=\frac{3}{2}$.

EXEMPLE 7. Trouver quelques premiers termes du développement en

série de la fonction $f(z) = \operatorname{tg} z$ suivant les puissances de z et déterminer le rayon de convergence de cette série.

SOLUTION. Supposons que la série cherchée est de la forme

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \ldots,$$

où

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \quad f^{(0)}(0) = f(0) = 0.$$

Pour trouver les valeurs des dérivées $f^{(n)}(z)$ au point $z = 0$, dérivons la fonction donnée. Il vient

$$f'(z) = \frac{1}{\cos^2 z} \quad \text{ou} \quad f'(z) = 1 + f^2(z), \tag{13}$$

$$\left.\begin{aligned} f''(z) &= 2f(z) f'(z), \\ f'''(z) &= 2[f'^2(z) + f(z) f''(z)], \\ f^{\mathrm{IV}}(z) &= 2[3f'(z) f''(z) + f(z) f'''(z)], \\ f^{\mathrm{V}}(z) &= 2[3f''^2(z) + 4f'(z) f'''(z) + f(z) f^{(\mathrm{IV})}(z)], \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

En posant $z = 0$ dans (13) et (14), on trouve

$$f'(0) = 1; \quad f''(0) = 0; \quad f'''(0) = 2; \quad f^{(\mathrm{IV})}(0) = 0; \quad f^{(\mathrm{V})}(0) = 16; \ldots$$

On porte les valeurs trouvées des dérivées dans la série et l'on obtient

$$\operatorname{tg} z = z + \frac{2}{3!} z^3 + \frac{16}{5!} z^5 + \ldots \tag{15}$$

Le point singulier le plus proche de $z = 0$ est le point $\zeta = \pi/2$. C'est pour cela que le rayon de convergence de la série trouvée sera $R = \pi/2$.

Développer les fonctions données en série de Taylor en utilisant les développements existants et trouver les rayons de convergence des séries:

210. $\sin(2z + 1)$ suivant les puissances de $z + 1$.

211. $\cos z$ suivant les puissances de $z + \frac{\pi}{4}$.

212. e^z suivant les puissances de $2z - 1$.

213. $\frac{1}{3z+1}$ suivant les puissances de $z + 2$.

214. $\frac{z+1}{z^2+4z-5}$ suivant les puissances de z.

215. $\frac{z}{z^2+i}$ suivant les puissances de z.

216. $\cos^2 \frac{iz}{2}$ suivant les puissances de z.

217. $\operatorname{sh}^2 \frac{z}{2}$ suivant les puissances de z.

218. $\ln(2 - z)$ suivant les puissances de z.

219. $\ln(2 + z - z^2)$ suivant les puissances de z.

Trouver quelques premiers termes du développement en série suivant les puissances de z des fonctions suivantes et déterminer les

rayons de convergence de ces séries:

220. $\frac{1}{1+e^z}$. 221. $\frac{1}{2+\sin z}$. 222. $\frac{1}{e^{-z}+5}$.

223. $\ln(1+e^{-z})$. 224. $\ln \cos z$. 225. $\ln(1+\cos z)$.

226. $e^{\frac{1}{1-z}}$.

227. Trouver une fonction $f(z)$ qui soit analytique dans le disque $|z| \leqslant 1$ et dont la valeur sur la circonférence $|z| = 1$ est égale à

$$\frac{a-\cos\theta+i\sin\theta}{a^2-2a\cos\theta+1}, \quad a>1, \quad \theta=\operatorname{Arg} z.$$

228. Soit $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ une fonction analytique dans le disque $|z| \leqslant 1$. Montrer que la valeur moyenne $\frac{f(z)}{z^n}$ que prend cette fonction sur la circonférence $|z| = 1$ est égale à a_n.

Considérons la série

$$\frac{c_{-1}}{z-z_0}+\frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2}+\ldots+\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}. \tag{16}$$

Si $c_{-n} \neq 0$ et si la limite finie

$$r=\lim_{n\to\infty}\frac{|c_{-n-1}|}{|c_{-n}|} \tag{17}$$

existe, alors cette série converge dans le domaine

$$|z-z_0|>r. \tag{18}$$

EXEMPLE 8. Trouver le domaine de convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+i)^{n+1}}{z^n}$.

SOLUTION. Ici $c_{-n} = (1+i)^{n+1}$, $c_{-n-1} = (1+i)^{n+2}$, $z_0 = 0$. Pour cette raison,

$$r=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(1+i)^{n+2}}{(1+i)^{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}|1+i|=\sqrt{2}.$$

Cette série converge dans le domaine $|z| > \sqrt{2}$.

EXEMPLE 9. Trouver le domaine de convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin in}{(z+i)^n}.$$

SOLUTION. On a

$$c_{-n}=\sin in=i\,\mathrm{sh}\,n,\qquad c_{-n-1}=i\,\mathrm{sh}\,(n+1).$$

C'est pour cela que

$$r=\lim_{n\to\infty}\frac{|\,i\,\mathrm{sh}\,(n+1)\,|}{|\,i\,\mathrm{sh}\,n\,|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{sh}\,(n+1)}{\mathrm{sh}\,n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{n+1}-e^{-n-1}}{e^{n}-e^{-n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{e-e^{-2n-1}}{1-e^{-2n}}=e.$$

Par conséquent, la série converge dans le domaine $|z+i|>e$, c'est-à-dire en dehors d'un disque de rayon e centré en $z_0=-i$.

Déterminer le domaine de convergence des séries suivantes:

229. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1-i)^n z^n}$.

230. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(\sqrt{2}+i\sqrt{2})^n}{z^n}$.

231. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^{-n}}{\cos in}$.

232. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^n(iz)^{-n}$.

233. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n(z+1)^n}$.

234. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n2^{-n}}{(z-2-i)^n}$.

235. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+1}{(z+2i)^n}$.

236. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(z+1-i)^{-n}}{n+i}$.

Une série de la forme

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n=$$

$$=\ldots+\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}+\ldots+\frac{c_{-1}}{z-z_0}+c_0+c_1(z-z_0)+\ldots+c_n(z-z_0)^n+\ldots \tag{19}$$

converge dans le domaine dans lequel les séries

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}=\frac{c_{-1}}{z-z_0}+\frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2}+\ldots, \tag{20}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n=c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\ldots \tag{21}$$

sont convergentes.

Supposons que la série (20) converge dans le domaine $|z-z_0|>r$, c'est-à-dire en dehors d'un disque de rayon r et de centre au point $z=z_0$, tandis que la série (21) converge dans le disque $|z-z_0|<R$. Dans ce cas, si:

1) $r>R$, la série (19) diverge partout;

2) $r<R$, la série (19) converge dans la couronne $r<|z-z_0|<R$. Ici $r\geqslant 0$, $0<R<+\infty$.

EXEMPLE 10. Déterminer le domaine de convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{(z+1)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{e^{in+1/2}}.$$

SOLUTION. Pour la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{(z+1)^n}$, on a

$$c_{-n} = e^{in}, \qquad c_{-n-1} = e^{i(n+1)}.$$

Par conséquent,

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{|e^{i(n+1)}|}{|e^{in}|} = 1,$$

de façon que la première série converge dans le domaine $|z+1| > 1$.

Pour la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{e^{in+1/2}}$, on a

$$c_n = e^{-in-1/2}, \qquad c_{n+1} = e^{-i(n+1)-1/2}.$$

Son rayon de convergence est

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|e^{-in-1/2}|}{|e^{-i(n+1)-1/2}|} = 1,$$

et la seconde série converge dans le domaine $|z+1| < 1$. Il s'ensuit que la série considérée diverge partout.

EXEMPLE 11. Déterminer le domaine de convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+4i)^n}{(z+2i)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z+2i}{6}\right)^n.$$

SOLUTION. Pour la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+4i)^n}{(z+2i)^n}$, on a

$$c_{-n} = (3+4i)^n, \qquad c_{-n-1} = (3+4i)^{n+1}.$$

Par conséquent,

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{|(3+4i)^{n+1}|}{|(3+4i)^n|} = \lim_{n\to\infty} |3+4i| = 5.$$

La première série converge dans le domaine $|z+2i| > 5$. Pour la série $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z+2i}{6}\right)^n$, on a

$$c_n = 6^{-n}, \qquad c_{n+1} = 6^{-n-1}.$$

Pour cette raison, le rayon de convergence de cette série entière sera

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|6^{-n}|}{|6^{-n-1}|} = 6.$$

La série converge dans le domaine $|z+2i|<6$.
Donc, $r=5<R=6$. Par conséquent, la série donnée converge dans la couronne $5<|z+2i|<6$.

Déterminer le domaine de convergence des séries suivantes:

237. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+in\right)(z+1+i)^n$. 238. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{2^n}$.

239. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n(z-2+i)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}(1+in)(z-2+i)^n$.

240. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{4}\right)^n$.

241. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(z+1-i)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}n(z+1-i)^n$.

242. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}$.

243. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin in}{(z-i)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{n!}$ $(0!=1)$.

244. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4z^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n2^n}$. 245. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-1}{(z+1)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{(i+n)^n}$.

246. $-\frac{i}{2(z-i)}+\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-i)^n}{(2i)^n}$.

247. $\frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}z^n$. 248. $-\frac{1}{z-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n$.

249. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{b^n}$ $(b\neq 0)$.

Une fonction $f(z)$ qui est uniforme et analytique dans une couronne $r<$ $<|z-z_0|<R$ (les cas où $r=0$ et $R=+\infty$ ne sont pas exclus) peut être développée dans cette couronne en série de Laurent

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n=\sum_{n=-\infty}^{-1}c_n(z-z_0)^n+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n, \qquad (22)$$

où les coefficients c_n sont donnés par les formules

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{n+1}} \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{23}$$

Ici Γ est une circonférence arbitraire de centre au point z_0 située à l'intérieur de la couronne susmentionnée.

Dans la formule (22), la série

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$$

est appelée partie principale de la série de Laurent, alors que la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$$

constitue la partie régulière de cette série.

Dans la pratique, pour la recherche des coefficients c_n, on tâche d'éviter l'utilisation des formules (23), car cela entraîne des calculs encombrants. Habituellement, si seulement cela est possible, on met en œuvre les développements tout prêts en série de Taylor des fonctions élémentaires.

EXEMPLE 12. Développer en série de Laurent la fonction

$$f(z) = \frac{1}{(z^2-1)^2}$$

dans la couronne $0 < |z-1| < 2$.

SOLUTION. PREMIÈRE MÉTHODE. La fonction $f(z) = \dfrac{1}{(z^2-1)^2}$ est analytique dans la couronne $0 < |z-1| < 2$. On trouve les coefficients de la série de Laurent d'après la formule (23)

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\dfrac{1}{(z^2-1)^2}}{(z-1)^{n+1}}\,dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{dz}{(z-1)^{n+3}(z+1)^2},$$

où Γ désigne toute circonférence de centre au point $z_0 = 1$ située dans la couronne donnée.

Si $n+3 \leqslant 0$, c'est-à-dire si $n \leqslant -3$, la fonction figurant sous le signe d'intégration $\dfrac{1}{(z-1)^{n+3}(z+1)^2}$ sera analytique en tous les points situés à l'intérieur de la circonférence Γ, y compris le point $z = 1$. Dans ce cas,

$$\int_\Gamma \frac{dz}{(z-1)^{n+3}(z+1)^2} = 0,$$

c'est-à-dire $c_n = 0$ pour $n = -3, -4, \ldots$ Si $n+3 > 0$, c'est-à-dire si $n > -3$, alors, en appliquant la formule (2) du § 6 de la dérivée de tout ordre d'une fonction analytique, on obtient

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\dfrac{1}{(z+1)^2}}{(z-1)^{n+3}}\,dz = \frac{1}{(n+2)!} \frac{d^{n+2}}{dz^{n+2}} \left[\frac{1}{(z+1)^2} \right] \Bigg|_{z=1} =$$

$$=\frac{1}{(n+2)!}\cdot\frac{(-1)^n(n+3)!}{(z+1)^{n+4}}\Bigg|_{z=1}=\frac{(-1)^n(n+3)}{2^{n+4}}.$$

Pour $n=-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, on a

$$c_n=\frac{(-1)^n(n+3)}{2^{n+4}}.$$

Pour la fonction en question, la série de Laurent dans la couronne $0<|z-1|<$ <2 sera de la forme

$$\frac{1}{(z^2-1)^2}=\sum_{n=-2}^{+\infty}c_n(z-1)^n=\sum_{n=-2}^{+\infty}\frac{(-1)^n(n+3)}{2^{n+4}}(z-1)^n$$

ou

$$\frac{1}{(z^2-1)^2}=\frac{1}{4}\frac{1}{(z-1)^2}-\frac{1}{4}\frac{1}{z-1}+\frac{3}{16}-\frac{1}{8}(z-1)+$$
$$+\frac{5}{64}(z-1)^2-\frac{3}{64}(z-1)^3+\ldots$$

DEUXIÈME MÉTHODE. Pour résoudre le problème, il faut mettre la fonction $f(z)$ sous la forme d'une somme des puissances (positives et négatives) de la différence $(z-1)$. Effectuons cette transformation comme suit:

$$f(z)=\frac{1}{(z^2-1)^2}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+1}\right)^2=$$
$$=\frac{1}{4}\frac{1}{(z-1)^2}-\frac{1}{4}\frac{1}{z-1}+\frac{1}{4}\frac{1}{z+1}+\frac{1}{4}\frac{1}{(z+1)^2}. \tag{24}$$

Les premiers deux termes dans le second membre (24) sont de la forme requise car ils contiennent la puissance de la différence $(z-1)$.

Mettons les deux derniers termes sous la forme

$$\frac{1}{z+1}=\frac{1}{(z-1)+2}=\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z-1}{2}},\qquad \frac{1}{(z+1)^2}=\frac{1}{4}\left[1+\left(\frac{z-1}{2}\right)\right]^{-2}.$$

En utilisant la formule (12), ensuite, la formule (11), pour $\alpha=-2$, on obtient

$$\frac{1}{z+1}=\frac{1}{2}\left[1-\frac{z-1}{2}+\left(\frac{z-1}{2}\right)^2-\left(\frac{z-1}{2}\right)^3+\ldots\right], \tag{25}$$

$$\frac{1}{(z+1)^2}=\frac{1}{4}\left[1-2\cdot\frac{z-1}{2}+\frac{-2(-2-1)}{2!}\left(\frac{z-1}{2}\right)^2+\right.$$
$$\left.+\frac{-2(-2-1)(-2-2)}{3!}\left(\frac{z-1}{2}\right)^3+\ldots\right]. \tag{26}$$

En portant (25) et (26) dans (24), on trouve

$$\frac{1}{(z^2-1)^2}=\frac{1}{4}\frac{1}{(z-1)^2}-\frac{1}{4}\frac{1}{z-1}+\frac{1}{8}\left[1-\frac{z-1}{2}+\left(\frac{z-1}{2}\right)^2-\right.$$
$$\left.-\left(\frac{z-1}{2}\right)^3+\ldots\right]+\frac{1}{16}\left[1-(z-1)+\frac{3}{2^2}(z-1)^2-\frac{4}{2^3}(z-1)^3+\ldots\right]$$

ou

$$\frac{1}{(z^2-1)^2}=\frac{1}{4}\,\frac{1}{(z-1)^2}-\frac{1}{4}\,\frac{1}{z-1}+\frac{3}{16}-\frac{1}{8}(z-1)+\frac{5}{64}(z-1)^2-$$
$$-\frac{3}{64}(z-1)^3+\dots$$

EXEMPLE 13. Développer en série de Laurent la fonction

$$f(z)=z^2\cos\frac{1}{z}$$

dans le voisinage du point $z_0 = 0$.

SOLUTION. Pour tout ζ complexe, on a

$$\cos\zeta=1-\frac{\zeta^2}{2!}+\frac{\zeta^4}{4!}-\frac{\zeta^6}{6!}+\dots$$

En posant $\zeta=\frac{1}{z}$, on obtient

$$z^2\cos\frac{1}{2}=z^2\left(1-\frac{1}{2!\,z^2}+\frac{1}{4!z^4}-\frac{1}{6!\,z^6}+\dots\right)=z^2-$$
$$-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!\,z^2}-\frac{1}{6!\,z^4}+\dots$$

ou

$$z^2\cos\frac{1}{z}=-\frac{1}{2}+z^2+\frac{1}{4!\,z^2}-\frac{1}{6!\,z^4}+\dots$$

Ce développement est valable pour n'importe quel point $z \neq 0$. Dans ce cas, la « couronne » est représentée par tout le plan complexe privé du point $z = 0$. Cette « couronne » peut être définie par la relation suivante: $0 < |z-0| < +\infty$. Ici $r = 0$, $R = +\infty$, $z_0 = 0$. La fonction considérée est analytique dans la « couronne » indiquée.

EXEMPLE 14. Examiner différents développements en série de Laurent de la fonction

$$f(z)=\frac{2z+1}{z^2+z-2},$$

en posant $z_0 = 0$.

SOLUTION. La fonction $f(z)$ possède deux points singuliers: $z_1 = -2$ et $z_2 = 1$. Cela signifie qu'il y a trois « couronnes » de centre au point $z_0 = 0$ dans chacune desquelles la fonction $f(z)$ est analytique:

a) le disque $|z| < 1$;

b) la couronne $1 < |z| < 2$;

c) le domaine $2 < |z| < +\infty$, c'est-à-dire l'extérieur du disque $|z| \leqslant 2$.

Trouvons les séries de Laurent pour la fonction $f(z)$ dans chacune de ces «couronnes».

Mettons la fonction $f(z)$ sous la forme d'une somme de fractions élémentaires

$$f(z)=\frac{1}{z+2}+\frac{1}{z-1}. \tag{27}$$

a) Développement dans le disque $|z| < 1$. Transformons (27) de la façon

suivante :

$$f(z)=\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z+2}=\frac{1}{2}\,\frac{1}{1+\frac{z}{2}}-\frac{1}{1-z}. \tag{28}$$

En utilisant la formule (12), on obtient

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+z^3+\ldots,\qquad |z|<1, \tag{29}$$

$$\frac{1}{1+\frac{z}{2}}=1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}-\frac{z^3}{8}+\ldots,\quad |z|<2. \tag{30}$$

En substituant (29) et (30) dans (28), on trouve

$$\frac{2z+1}{z^2+z-2}=\frac{1}{2}-\frac{z}{4}+\frac{z^2}{8}-\frac{z^3}{16}+\ldots-(1+z+z^2+z^3+\ldots)=$$

$$=-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}z-\frac{7}{8}z^2-\frac{15}{16}z^3+\ldots$$

Ce développement représente la série de Taylor de la fonction $f(z)$.

b) Développement dans la couronne $1<|z|<2$. Pour la fonction $\frac{1}{1+\frac{z}{2}}$ la série (30) reste convergente dans cette couronne, car $|z|<2$. Pour la fonction $\frac{1}{1-z}$, la série (29) diverge si $|z|>1$. Pour cette raison, transformons $f(z)$ de la façon suivante :

$$f(z)=\frac{1}{2}\,\frac{1}{1+\frac{z}{2}}+\frac{1}{z}\,\frac{1}{1-\frac{1}{z}}. \tag{31}$$

En appliquant la formule (12), on obtient

$$\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\ldots \tag{32}$$

Cette série converge pour $\left|\frac{1}{z}\right|<1$, c'est-à-dire pour $|z|>1$.

En substituant (30) et (32) dans (31), on trouve

$$\frac{2z+1}{z^2+z-2}=\frac{1}{2}-\frac{z}{4}+\frac{z^2}{8}-\frac{z^3}{16}+\ldots+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\ldots=$$

$$=\ldots+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+\frac{1}{2}-\frac{z}{4}+\frac{z^2}{8}-\frac{z^3}{16}+\ldots$$

ou

$$\frac{2z+1}{z^2+z-2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}.$$

c) Développement pour $|z| > 2$. Pour la fonction $\frac{1}{1+\frac{z}{2}}$, la série (30) diverge si $|z| > 2$, alors que pour la fonction $\frac{1}{1-\frac{1}{z}}$, la série (32) converge, car, si $|z| > 2$, à plus forte raison $|z| > 1$.

Mettons la fonction $f(z)$ sous la forme

$$f(z)=\frac{1}{z}\,\frac{1}{1+\frac{2}{z}}+\frac{1}{z}\,\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\frac{1}{z}\left(\frac{1}{1+\frac{2}{z}}+\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\right)$$

En utilisant la formule (12), on obtient

$$f(z)=\frac{1}{z}\left(1-\frac{2}{z}+\frac{4}{z^2}-\frac{8}{z^3}+\ldots+1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{z}\left(2-\frac{1}{z}+\frac{5}{z^2}-\frac{7}{z^3}+\ldots\right)$$

ou

$$\frac{2z+1}{z^2+z-2}=\frac{2}{z}-\frac{1}{z^2}+\frac{5}{z^3}-\frac{7}{z^4}+\ldots$$

L'exemple qui vient d'être exposé montre que, pour une et même fonction $f(z)$, le développement en série de Laurent, généralement parlant, prend des formes différentes dans diverses couronnes.

EXEMPLE 15. Développer en série de Laurent la fonction

$$f(z)=\frac{2z-3}{z^2-3z+2}$$

dans le voisinage de ses points singuliers.

SOLUTION. Les points singuliers de la fonction $f(z)$ sont: $z_1 = 1$, $z_2 = 2$.

1) Développement de la fonction $f(z)$ dans le voisinage du point $z_1 = 1$, c'est-à-dire dans la couronne $0 < |z-1| < 1$. Mettons la fonction $f(z)$ sous la forme d'une somme de fractions élémentaires

$$\frac{2z-3}{z^2-3z+2}=\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z-2}.$$

Transformons le second membre de la façon suivante:

$$\frac{2z-3}{z^2-3z+2}=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{1-(z-1)}.$$

En utilisant le développement (12), dans lequel on substitue $-(z-1)$ à z, on obtient

$$\frac{2z-3}{z^2-3z+2}=\frac{1}{z-1}-[1+(z-1)+(z-1)^2+\ldots]$$

ou

$$\frac{2z-3}{z^2-3z+2}=\frac{1}{z-1}-\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n. \qquad (33)$$

2) Développement de la fonction $f(z)$ dans le voisinage du point $z_2 = 2$, c'est-à-dire dans la couronne $0 < |z-2| < 1$. On a

$$\frac{2z-3}{z^2-3z+2} = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2} = \frac{1}{z-2} + \frac{1}{1+(z-2)} =$$

$$= \frac{1}{z-2} + 1 - (z-2) + (z-2)^2 - (z-3)^3 + \ldots$$

ou

$$\frac{2z-3}{z^2-3z+2} = \frac{1}{z-2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-2)^n. \tag{34}$$

Développer en série de Laurent dans le voisinage du point $z = 0$ les fonctions suivantes:

250. $\frac{\sin z}{z^2}$. **251.** $\frac{\sin^2 z}{z}$. **252.** $\frac{e^z}{z}$. **253.** $\frac{e^z}{z^3}$.

254. $z^3 e^{\frac{1}{z}}$. **255.** $z^4 \cos \frac{1}{z}$. **256.** $\frac{1}{z} \sin^2 \frac{2}{z}$.

257. $\frac{1-\cos z}{z^2}$. **258.** $\frac{e^z-1}{z}$. **259.** $\frac{1+\cos z}{z^4}$. **260.** $\frac{1-e^{-z}}{z^3}$.

Développer en série de Laurent les fonctions suivantes dans le voisinage des points indiqués:

261. $\frac{z}{(z+1)^2}$, $z_0 = -1$. **262.** $\frac{\sin z}{z-2}$, $z_0 = 2$.

263. $z e^{\frac{1}{z+i}}$, $z_0 = -i$.

Développer en série de Laurent les fonctions suivantes dans les couronnes indiquées:

264. $\frac{1}{(z-2)(z-3)}$, a) $2 < |z| < 3$; b) $3 < |z| < +\infty$.

265. $\frac{1}{z^2+z}$, a) $0 < |z| < 1$; b) $1 < |z| < +\infty$.

266. $\frac{1}{(z+2)(1+z^2)}$, a) $1 < |z| < 4$; b) $4 < |z| < +\infty$.

267. $\frac{2z+3}{z^2+3z+2}$, $1 < |z| < 2$.

268. $\frac{z^2-z+3}{z^3-3z+2}$, a) $|z| < 1$; b) $1 < |z| < 2$; c) $2 < |z| < \infty$.

269. $\frac{2}{z^2-1}$, $1 < |z+2| < 3$. **270.** $\frac{1}{z^2+2z-8}$, $1 < |z+2| < 4$.

271. $\frac{z+2}{z^2-4z+3}$, $2<|z-1|<+\infty$.

272. $\frac{z^5}{(z^2-4)^2}$, $2<|z|<+\infty$. 273. $\frac{z}{(z^2-4)(z^2-1)}$, $1<|z|<2$.

274. $\frac{1}{z^2+1}$, $0<|z-i|<2$. 275. $\frac{1}{(z^2-4^2)}$, $4<|z+2|<+\infty$.

§ 8. Zéros d'une fonction. Points singuliers isolés

1. ZÉROS D'UNE FONCTION. Soit $f(z)$ une fonction analytique en un point z_0. Le point z_0 est appelé *zéro d'ordre* (ou *de multiplicité*) *n de la fonction* $f(z)$ si les conditions ci-dessous sont vérifiées:

$$f(z_0)=0, \quad f'(z_3)=0, \ \ldots, \quad f^{(n-1)}(z_0)=0, \quad f^{(n)}(z_0)\neq 0.$$

Si $n=1$, le point z_0 est un zéro simple.

Le point z_0 constitue un zéro d'ordre n de la fonction $f(z)$, qui est analytique en ce point, si, et seulement si, dans un certain voisinage du point z_0 l'égalité

$$f(z)=(z-z_0)^n\varphi(z),$$

est vérifiée. Ici la fonction $\varphi(z)$ est analytique au point z_0 et $\varphi(z_0)\neq 0$.

EXEMPLE 1. Trouver les zéros de la fonction $f(z)=1+\cos z$ et déterminer leur ordre.

SOLUTION. En égalant $f(z)$ à zéro, on obtient $\cos z=-1$, d'où l'on trouve que $z_n=(2n+1)\pi$ $(n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ sont les zéros de la fonction donnée. On obtient ensuite

$$f'[(2n+1)\pi]=-\sin(2n+1)\pi=0,$$

$$f''[(2n+1)\pi]=-\cos(2n+1)\pi=1\neq 0.$$

Par conséquent, les points $z_n=(2n+1)\pi$ $(n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ sont des zéros d'ordre 2 de la fonction considérée.

EXEMPLE 2. Trouver les zéros de la fonction $f(z)=1-e^z$ et déterminer leur ordre.

SOLUTION. En égalant la fonction $f(z)$ à zéro, on trouve ses zéros $z_n=$ $=2n\pi i$ $(n=0, \pm 1, \ldots)$. Ensuite,

$$f'(2n\pi i)=-e^{2n\pi i}=-1\neq 0.$$

Donc, $f(2n\pi i)=0$, $f'(2n\pi i)\neq 0$, ce qui signifie que les points $z_n=2n\pi i$ $(n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ sont des zéros simples de la fonction $f(z)=1-e^z$.

EXEMPLE 3. Trouver l'ordre du zéro $z_0=0$ pour la fonction

$$f(z)=\frac{z^8}{z-\sin z}.$$

SOLUTION. En utilisant le développement en série de Taylor de la fonction $\sin z$ dans le voisinage du point $z_0=0$, on obtient

$$f(z)=\frac{z^8}{z-\sin z}=\frac{z^8}{z-\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots\right)}=$$

$$=\frac{z^8}{\frac{z^3}{3!}-\frac{z^5}{5!}+\ldots}=\frac{z^5}{\frac{1}{3!}-\frac{z^2}{5!}+\ldots}=z^5\,\frac{1}{\frac{1}{3!}-\frac{z^2}{5!}+\ldots}.$$

Posons

$$\varphi(z) = \frac{1}{\frac{1}{3!} - \frac{z^3}{5!} + \ldots}$$

Alors $f(z) = z^5 \varphi(z)$, où $\varphi(z)$ est une fonction analytique au point $z_0 = 0$, de plus, $\varphi(0) = 6 \neq 0$. Il s'ensuit que le point $z_0 = 0$ est un zéro d'ordre 5 pour la fonction considérée.

EXEMPLE 4. Trouver les zéros de la fonction $f(z) = (z^2 + 1)^3 \operatorname{sh} z$ et déterminer leur ordre.

SOLUTION. En posant $f(z) = 0$, on obtient $(z^2 + 1)^3 \operatorname{sh} z = 0$, d'où $z^2 + 1 = 0$ ou $\operatorname{sh} z = 0$. On résout ces équations et l'on trouve les zéros de la fonction $f(z)$:

$$z = -i, \qquad z = i, \qquad z = k\pi i \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Soit $z = -i$. Alors la fonction $f(z)$ peut être mise sous la forme

$$f(z) = (z + i)^3 \varphi(z),$$

où la fonction $\varphi(z) = (z - i)^3 \operatorname{sh} z$ est analytique au point $z = -i$, de plus, $\varphi(-i) = 8i \operatorname{sh} i = -8 \sin 1 \neq 0$. Cela veut dire que le point $z = -i$ est un zéro d'ordre 3. D'une façon analogue, on montre que le point $z = i$ constitue également un zéro d'ordre 3. Etudions les zéros $z = k\pi i$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. La dérivée

$$f'(z) = 6z (z^2 + 1)^2 \operatorname{sh} z + (z^2 + 1)^3 \operatorname{ch} z$$

n'est pas nulle aux points $z = k\pi i$. Par conséquent, $z = k\pi i$ sont des zéros de premier ordre.

Trouver les zéros des fonctions suivantes et déterminer leur ordre:

276. a) $f(z) = z^4 + 4z^2$; b) $f(z) = \frac{\sin z}{z}$.

277. a) $f(z) = z^2 \sin z$; b) $f(z) = \frac{\operatorname{sh}^2 z}{z}$.

278. a) $f(z) = 1 + \operatorname{ch} z$; b) $f(z) = \frac{(1 - \operatorname{sh} z)^2}{z}$.

279. a) $f(z) = (z + \pi i) \operatorname{sh} z$; b) $f(z) = \cos z^3$.

280. a) $f(z) = (z^2 + \pi^2)(1 + e^{-\ })$; b) $f(z) = \cos z + \operatorname{ch} iz$.

Trouver l'ordre du zéro $z_0 = 0$ pour les fonctions suivantes:

281. $f(z) = \frac{z^6}{\left(\frac{z}{2}\right)^2 - \left(\sin \frac{z}{2}\right)^2}$. **282.** $f(z) = e^{\sin z} - e^{\operatorname{tg} z}$.

283. $f(z) = \frac{z^3}{1 + z - e^z}$. **284.** $f(z) = 2(\operatorname{ch} z - 1) - z^2$.

285. $f(z) = \frac{(1 - \cos 2z)^2}{z - \operatorname{sh} z}$. **286.** $f(z) = (e^z - e^{z^2}) \ln(1 - z)$.

287. $f(z) = z^2 (e^{z^2} - 1)$. **288.** $f(z) = 6 \sin z^3 + z^3 (z^6 - 6)$.

289. Le point z_0 est un zéro d'ordre n pour la fonction $\varphi(z)$, étant en même temps un zéro d'ordre m pour la fonction $\psi(z)$. Quel rôle joue alors le point z_0 pour les fonctions

a) $\varphi(z)+\psi(z)$; b) $\varphi(z)\cdot\psi(z)$; c) $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$?

2. POINTS SINGULIERS ISOLÉS. Un point z_0 est appelé *point singulier isolé* d'une fonction $f(z)$ s'il existe un voisinage de ce point dans lequel la fonction $f(z)$ est analytique, sauf au point $z = z_0$ lui-même.

Le point z_0 est appelé *point singulier éliminable* de la fonction $f(z)$ si cette fonction admet une limite finie au point z_0.

EXEMPLE 5. Soit $f(z)=\frac{e^z-1}{z}$.

Soit $z_0 = 0$ un point singulier pour la fonetion $f(z)$. On a

$$\lim_{z\to 0} f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z}=1.$$

Par conséquent, le point $z_0 = 0$ est un point singulier éliminable.

Le point z_0 est appelé *pôle* de la fonction $f(z)$ si $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$.

Pour que le point z_0 soit un pôle de la fonction $f(z)$, il faut et il suffit que ce point soit un zéro pour la fonction $\varphi(z)=\frac{1}{f(z)}$.

Le point z_0 est appelé *pôle d'ordre n* ($n \geqslant 1$) de la fonction $f(z)$ si ce point constitue un zéro d'ordre n pour la fonction $\varphi(z)=\frac{1}{f(z)}$ Dans le cas où $n = 1$, on a affaire à un pôle simple.

EXEMPLE 6. Soit $f(z)=\frac{1}{z^3}$.

Soit $z_0 = 0$ un point singulier pour la fonction $f(z)$. Posons $z=\rho e^{i\varphi}$. Alors $f(z)=\frac{e^{-i3\varphi}}{\rho^3}$. Il est évident que $|f(z)|=\frac{1}{\rho^3}$, donc, $|f(z)|$ croît indéfiniment lorsque $z\to 0$ suivant n'importe quelle loi. Par conséquent, $\lim\limits_{z\to 0} f(z) = \infty$, ce qui signifie que le point $z_0 = 0$ est un pôle de la fonction donnée. Pour les fonctions $\varphi(z)=z^3$, le point $z_0 = 0$ est un zéro d'ordre 3, donc, $z_0 = 0$ est un pôle d'ordre 3 pour la fonction $f(z)=\frac{1}{z^3}$.

Pour qu'un point z_0 soit un pôle d'ordre n d'une fonction $f(z)$, il faut et il suffit que la fonction $f(z)$ puisse être mise sous la forme $f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^n}$, où la fonction $\varphi(z)$ est analytique au point z_0 et $\varphi(z_0)\neq 0$.

EXEMPLE 7. Soit $f(z)=\frac{\sin z}{z^3+z^2-z-1}$.

La fonction $f(z)$ possède deux points singuliers: $z = -1$ et $z = 1$. Examinons le point $z = -1$. Mettons la fonction $f(z)$ sous la forme

$$f(z)=\frac{\frac{\sin z}{z-1}}{(z+1)^2}.$$

Ici

$$\varphi(z)=\frac{\sin z}{z-1}$$

est une fonction analytique dans le voisinage du point $z=-1$, de plus, $\varphi(-1)=$ $=\frac{\sin 1}{2}\neq 0$. Il s'ensuit que le point $z=-1$ est un pôle de multiplicité 2 de la fonction considérée. D'une façon analogue, en écrivant $f(z)$ sous la forme

$$f(z)=\frac{\frac{\sin z}{(z+1)^2}}{z-1},$$

on arrive à la conclusion que le point $z=1$ est un pôle simple de cette fonction.

Un point z_0 est appelé *point singulier essentiel* d'une fonction $f(z)$ si cette fonction n'admet aucune limite, ni finie ni infinie, au point z_0.

EXEMPLE 8. Déterminer le caractère du point singulier $z=0$ de la fonction $f(z)=e^{1/z^2}$.

SOLUTION. Examinons le comportement de cette fonction sur l'axe réel et sur celui imaginaire. Sur l'axe réel, $z=x$ et $f(x)=e^{1/x^2}\to\infty$ pour $x\to 0$. Sur l'axe imaginaire, $z=iy$ et $f(iy)=e^{-\frac{1}{y^2}}\to 0$ pour $y\to 0$. Par conséquent, au point $z=0$ la fonction $f(z)$ n'admet pas de limite ni finie ni infinie. Donc, le point $z=0$ est un point singulier essentiel de la fonction $f(z)$.

EXEMPLE 9. Déterminer e caractère du point singulier $z=0$ de la fonction

$$f(z)=\frac{1}{2+z^2-2\operatorname{ch} z}.$$

SOLUTION. Le point $z=0$ est un pôle pour la fonction $f(z)$, car c'est un zéro du dénominateur. Examinons la fonction $\varphi(z)=\frac{1}{f(z)}=2+z^2-$ $-2\operatorname{ch} z$. Pour cette fonction, $\varphi(0)=0$. Trouvons l'ordre du zéro $z=0$ de cette fonction. On a

$$\varphi'(z)=2z-2\operatorname{sh} z,\quad \varphi'(0)=0;\qquad \varphi''(z)=2-2\operatorname{ch} z,\quad \varphi''(0)=0;$$

$$\varphi'''(z)=-2\operatorname{sh} z,\quad \varphi'''(0)=0;\qquad \varphi^{IV}(z)=-2\operatorname{ch} z,\quad \varphi^{IV}(0)=-2\neq 0.$$

De cette façon, $z=0$ est un zéro d'ordre 4 pour $\varphi(z)$, ce qui signifie que, pour la fonction donnée $f(z)$, c'est un pôle d'ordre 4.

EXEMPLE 10. Déterminer le caractère du point singulier $z=1$ de la fonction

$$f(z)=\frac{\sin \pi z}{2e^{z-1}-z^2-1}.$$

SOLUTION. Considérons la fonction

$$\varphi(z)=\frac{1}{f(z)}=\frac{2e^{z-1}-z^2-1}{\sin \pi z}.$$

Le point $z=1$ sera un zéro d'ordre 3 pour le numérateur

$$\psi(z)=2e^{z-1}-z^2-1,$$

car

$$\psi(1)=0;\qquad \psi'(1)=(2e^{z-1}-2z)\,|_{z=1}=0;$$

$$\psi''(1)=(2e^{z-1}-2)\,|_{z=1}=0;\qquad \psi'''(1)=2e^{z-1}\,|_{z=1}=2\neq 0.$$

Le point $z = 1$ est un zéro de premier ordre pour le dénominateur $\sin \pi z$ de la fonction $\varphi(z)$.

Par conséquent, le point $z = 1$ sera un zéro d'ordre $3 - 1 = 2$ pour la fonction $\varphi(z)$, c'est-à-dire un pôle d'ordre 2 pour la fonction donnée.

Déterminer le caractère du point singulier $z_0 = 0$ pour les fonctions suivantes:

290. a) $\frac{1}{z - \sin z}$; b) $\frac{1}{\cos z - 1 + \frac{z^2}{2}}$; c) $\frac{1}{e^{-z} + z - 1}$.

291. a) $\frac{\sin z}{e^{-z} + z - 1}$; b) $\frac{\operatorname{sh} z}{z - \operatorname{sh} z}$.

Trouver les points singuliers et déterminer leur caractère pour les fonctions suivantes:

292. a) $\frac{1}{1 - \sin z}$; b) $\frac{1 - \cos z}{z^2}$. **293.** a) $e^{\frac{1}{z+2}}$; b) $\cos \frac{1}{z}$.

294. a) $\frac{z}{z^5 + 2z^4 + z^3}$; b) $\frac{1}{e^{-z} - 1} + \frac{1}{z^2}$.

295. a) $e^{-\frac{1}{z^2}}$; b) $\sin \frac{\pi}{z+1}$; c) $\operatorname{ch} \frac{1}{z}$.

296. a) $\frac{z^2}{\cos z - 1}$; b) $\frac{1 - \sin z}{\cos z}$; c) $\frac{z - \pi}{\sin^2 z}$.

Les assertions citées ci-après sont valables.

1. *Pour qu'un point z_0 soit un point singulier éliminable d'une fonction $f(z)$, il faut et il suffit que le développement en série de Laurent de $f(z)$ au voisinage du point z_0 ne contienne pas de partie principale.*

2. *Pour qu'un point z_0 soit un pôle d'une fonction $f(z)$, il faut et il suffit que la partie principale du développement en série de Laurent de $f(z)$ au voisinage du point z_0 ne contienne qu'un nombre fini de termes:*

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{(z - z_0)^k} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad (c_{-k} \neq 0).$$

L'exposant le plus grand de la différence $(z - z_0)$ qui figure aux dénominateurs des termes constitutifs de la partie principale de la série de Laurent coïncide avec l'ordre du pôle.

3. *Un point z_0 est un point singulier essentiel d'une fonction $f(z)$ si, et seulement si, la partie principale du développement en série de Laurent de cette fonction au voisinage du point z_0 contient une infinité de termes.*

EXEMPLE 11. Déterminer le caractère du point singulier $z_0 = 0$ de la fonction

$$f(z) = \frac{1 - e^{-z}}{z}.$$

SOLUTION. En utilisant le développement en série de Taylor de la fonction e^{-z} au voisinage du point $z_0 = 0$, on obtient le développement en série de Laurent de la fonction $f(z)$ au voisinage du zéro

$$f(z) = \frac{1}{z}(1 - e^{-z}) = \frac{1}{z}\left[1 - \left(1 - z + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} + \ldots\right)\right] =$$

$$=\frac{1}{z}\left(z-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}-\dots\right)=1-\frac{z}{2!}+\frac{z^2}{3!}-\dots$$

Ce développement ne contient pas de partie principale. On peut donc affirmer que le point $z_0=0$ est un point singulier éliminable.

La fonction $f(z)$ dont la définition est complétée par l'unité au point $z = 0$, c'est-à-dire

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{1-e^{-z}}{z}, & \text{si } z\neq 0,\\ 1, & \text{si } z=0,\end{cases}$$

est également analytique au point $z_0 = 0$.

EXEMPLE 12. Déterminer le caractère du point singulier $z_0 = 0$ de la fonction

$$f(z)=\frac{1-\cos z}{z^7}.$$

SOLUTION. En développant la fonction $\cos z$ en série de Taylor suivant les puissances de z, on obtient le développement en série de Laurent de la fonction $f(z)$ au voisinage du zéro:

$$f(z)=\frac{1}{z^7}\left(\frac{z^2}{2!}-\frac{z^4}{4!}+\frac{z^6}{6!}-\frac{z^8}{8!}+\frac{z^{10}}{10!}-\dots\right)=$$

$$=\frac{1}{2!z^5}-\frac{1}{4!z^3}+\frac{1}{6!z}-\frac{z}{8!}+\frac{z^3}{10!}-\dots$$

Le développement en série de Laurent de la fonction $f(z)$ au voisinage du point $z_0 = 0$ contient un nombre fini de termes à puissances négatives de z. Il s'ensuit que le point $z_0 = 0$ est un pôle d'ordre 5, car le plus grand exposant de z figurant aux dénominateurs dans la partie principale de la série de Laurent est égal à 5.

EXEMPLE 13. Déterminer le caractère du point singulier $z = 1$ de la fonction

$$f(z)=(z-1)\,e^{\frac{1}{z-1}}.$$

SOLUTION. En utilisant le développement

$$e^u=1+u+\frac{u^2}{2!}+\frac{u^3}{3!}+\dots$$

et en posant $u=\dfrac{1}{z-1}$, on obtient le développement en série de Laurent de la fonction $f(z)$ au voisinage du point $z_0 = 1$:

$$f(z)=(z-1)\left[1+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2!(z-1)^2}+\frac{1}{3!(z-1)^3}+\dots\right]=$$

$$=1+(z-1)+\frac{1}{2!(z-1)}+\frac{1}{3!(z-1)^2}+\dots$$

Ce développement contient une infinité de termes à puissances négatives de $(z-1)$. Par conséquent, le point $z_0 = 1$ est un point singulier essentiel de la fonction $f(z)$.

Déterminer le caractère des points singuliers indiqués:

297. $\dfrac{1+\cos z}{z-\pi}$, $z_0=\pi$. 298. $\dfrac{z^2-3z+2}{z^2-2z+1}$, $z_0=1$.

299. $\frac{\sin z}{z^2}$, $z_0=0$.

300. $\frac{\operatorname{sh} z}{z}$, $z_0=0$.

301. $\cos\frac{1}{z+\pi}$, $z_0=-\pi$.

302. $\frac{z^2-1}{z^6+2z^5+z^4}$, $z=0$, $z_0=-1$.

303. $\frac{\ln(1+z^3)}{z^2}$, $z_0=0$.

304. $\frac{\sin^2 z}{z}$, $z_0=0$.

305. $\frac{e^{z+e}}{z+e}$, $z_0=-e$.

306. $\cos\frac{1}{z}+\sin\frac{2-\pi z}{2z}$, $z_0=0$.

307. $z\operatorname{sh}\frac{1}{z}$, $z_0=0$.

§ 9. Résidus des fonctions

Soit z_0 un point singulier isolé d'une fonction $f(z)$. On appelle *résidu* de la fonction $f(z)$ au point z_0 le nombre désigné par le symbole $\operatorname{Res} f(z_0)$ qui vérifie l'égalité

$$\operatorname{Res} f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} f(z)\,dz. \tag{1}$$

(On utilise également les notations: $\operatorname{Res}[f(z);\,z_0]$, $\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z)$.) Comme contour γ, on peut prendre une circonférence centrée en z_0 et de rayon suffisamment petit pour qu'elle ne dépasse pas les frontières du domaine d'analycité de la fonction $f(z)$ et ne contienne pas dans son intérieur d'autres points singuliers de cette fonction. Le résidu de la fonction est donné par le coefficient de la première puissance négative dans le développement en série de Laurent de $f(z)$ au voisinage de point $z=z_0$:

$$\operatorname{Res} f(z_0)=c_{-1}. \tag{2}$$

Le résidu en un point singulier éliminable est nul.

Si le point z_0 est un pôle d'ordre n de la fonction $f(z)$, alors

$$\operatorname{Res} f(z_0)=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\{f(z)(z-z_0)^n\}. \tag{3}$$

S'il s'agit d'un pôle simple ($n=1$),

$$\operatorname{Res} f(z_0)=\lim_{z\to z_0}[f(z)(z-z_0)]. \tag{4}$$

Si la fonction $f(z)$ peut être présentée dans le voisinage du point z_0 comme le quotient de deux fonctions analytiques

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

de plus, si $\varphi(z_0)\neq 0$, $\psi(z_0)=0$, alors que $\psi'(z_0)\neq 0$, c'est-à-dire si z_0 est un pôle simple de la fonction $f(z)$, alors

$$\operatorname{Res} f(z_0)=\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)} \tag{5}$$

Si le point z_0 est un point singulier essentiel de la fonction $f(z)$, pour obtenir $\operatorname{Res} f(z_0)$, il faut trouver le coefficient c_{-1} dans le développement en série de Laurent de la fonction $f(z)$ au voisinage du point z_0. Ce coefficient sera justement $\operatorname{Res} f(z_0)$.

EXEMPLE 1. Trouver les résidus de la fonction

$$f(z)=\frac{\sin z^2}{z^3-\frac{\pi}{4}z^2}$$

en ses points singuliers.

SOLUTION. Les points singuliers de la fonction $\frac{\sin z^2}{z^3-\frac{\pi}{4}z^2}$ sont $z=0$ et $z=\pi/4$. Au point $z=0$ on a

$$\lim_{z\to 0} f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z^2}{z^2}\lim_{z\to 0}\frac{1}{z-\frac{\pi}{4}}=-\frac{4}{\pi}.$$

Il s'ensuit que le point $z=0$ est un point singulier éliminable de la fonction $f(z)$. Pour cette raison,

$$\operatorname{Res} f(0)=0.$$

Au point $z=\pi/4$ on a $\lim\limits_{z\to\pi/4} f(z)=\infty$, donc le point $z=\pi/4$ est un pôle (d'ordre 1) de la fonction $f(z)$.

Conformément à la formule (4), on a

$$\operatorname{Res} f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\lim_{z\to\pi/4} f(z)\left(z-\frac{\pi}{4}\right)=\lim_{z\to\pi/4}\frac{\sin z^2}{z^3-\frac{\pi}{4}z^2}\left(z-\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=\lim_{z\to\pi/4}\frac{\sin z^2}{z^2}=\frac{16}{\pi^2}\sin\frac{\pi^2}{16}.$$

EXEMPLE 2. Trouver les résidus de la fonction

$$f(z)=\frac{e^z}{(z+1)^3(z-2)}$$

en tous ses points singuliers.

SOLUTION. La fonction $f(z)$ a comme points singuliers $z=-1$ et $z=2$. Le point $z=-1$ est un pôle d'ordre 3 pour la fonction $f(z)$. Conformément à la formule (3), on a

$$\operatorname{Res} f(-1)=\frac{1}{2!}\lim_{z\to -1}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{e^z}{z-2}\right)=\frac{1}{2}\lim_{z\to -1}\frac{(z^2-6z+10)e^z}{(z-2)^3}=-\frac{17}{54e}.$$

Le point $z=2$ est un pôle d'ordre 1, ce qui nous permet d'écrire, conformément à la formule (4),

$$\operatorname{Res} f(2)=\lim_{z\to 2}\frac{e^z}{(z+1)^3}=\frac{e^3}{27}.$$

EXEMPLE 3. Trouver les résidus de la fonction $f(z)=\frac{1}{z^4+1}$ en ses points singuliers.

SOLUTION. Les points singuliers de la fonction $f(z)$ sont représentés par les zéros du dénominateur, c'est-à-dire qu'ils sont donnés par les racines de l'équation $z^4+1=0$. On a

$$z_1=e^{i\frac{\pi}{4}},\quad z_2=e^{i\frac{3\pi}{4}},\quad z_3=e^{-i\frac{3\pi}{4}},\quad z_4=e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

D'après la formule (5), on obtient

$$\operatorname{Res} f(z_1)=\frac{1}{4z^3}\Bigg|_{z=e^{i\frac{\pi}{4}}}=\frac{1}{4}e^{-i\frac{3\pi}{4}},\qquad \operatorname{Res} f(z_2)=\frac{1}{4z^3}\Bigg|_{z=e^{i\frac{3\pi}{4}}}=\frac{1}{4}e^{-i\frac{9\pi}{4}},$$

$$\operatorname{Res} f(z_3)=\frac{1}{4z^3}\Bigg|_{z=e^{-i\frac{3\pi}{4}}}=\frac{1}{4}e^{i\frac{9\pi}{4}},\qquad \operatorname{Res} f(z_4)=\frac{1}{4z^3}\Bigg|_{z=e^{-i\frac{\pi}{4}}}=\frac{1}{4}e^{i\frac{3\pi}{4}}.$$

EXEMPLE 4. Trouver le résidu de la fonction

$$f(z)=z^3\sin\frac{1}{z^2}$$

en son point singulier.

SOLUTION. Le point singulier de la fonction $f(z)$ se situe en $z=0$. C'est un point singulier essentiel pour la fonction susmentionnée. En effet, le développement en série de Laurent de $f(z)$ au voisinage du point $z=0$ est de la forme

$$f(z)=z^3\left(\frac{1}{z^2}-\frac{1}{3!\,z^6}+\frac{1}{5!\,z^{10}}-\ldots\right)=z-\frac{1}{3!\,z^3}+\frac{1}{5!\,z^7}-\ldots,$$

c'est-à-dire que sa partie principale contient un nombre infini de termes. Le résidu de la fonction au point $z=0$ est égal à zéro, car le coefficient c_{-1} dans le développement en série de Laurent de la fonction $f(z)$ est nul.

Si la fonction $f(z)$ est de la forme $f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, où les fonctions analytiques $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ admettent des zéros d'ordre supérieur à 1 au point z_0, il est commode de remplacer, dans ce cas, les fonctions $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ par leurs développements en série de Taylor au voisinage du point z_0.

EXEMPLE 5. Trouver le résidu au point $z=0$ de la fonction

$$f(z)=\frac{\sin 3z-3\sin z}{(\sin z-z)\sin z}$$

SOLUTION. Le point $z=0$ est un zéro aussi bien pour le numérateur $\varphi(z)=\sin 3z-3\sin z$ que pour le dénominateur $\psi(z)=(\sin z-z)\sin z$. Trouvons les ordres du zéro pour ces fonctions en utilisant le développement en série de Taylor de $\sin z$ au voisinage du point $z=0$:

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots$$

On a

$$\varphi(z)=\sin 3z-3\sin z=3z-\frac{3^3z^3}{3!}+\frac{3^5z^5}{5!}-\ldots$$

$$\ldots-3\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots\right)=-\frac{3^3-3}{3!}z^3+\frac{3^5-3}{5!}z^5-\ldots=z^3\varphi_1(z),$$

où

$$\varphi_1(z)=-\frac{3^3-3}{3!}+\frac{3^5-3}{5!}z^2-\ldots,\qquad \varphi_1(0)=-4\neq 0;$$

$$\psi(z)=(\sin z-z)\sin z=\left(-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots\right)\left(z-\frac{z^3}{3!}+\ldots\right)=$$

$$=z^4\left(-\frac{1}{3!}+\frac{z^2}{5!}-\ldots\right)\left(1-\frac{z^2}{3!}+\ldots\right)=z^4\psi_1(z),$$

où

$$\psi_1(z)=\left(-\frac{1}{3!}+\frac{z^2}{5!}-\dots\right)\left(1-\frac{z^2}{3!}+\dots\right), \qquad \psi_1(0)=-\frac{1}{6}\neq 0.$$

Par conséquent,

$$f(z)=\frac{\sin 3z-3\sin z}{(\sin z-z)\sin z}=\frac{z^3\varphi_1(z)}{z^4\psi_1(z)}=\frac{\varphi_1(z)}{z\psi_1(z)},$$

et, étant donné que $\varphi_1(0)\neq 0$, $\psi_1(0)\neq 0$, le point $z=0$ est un pôle simple de la fonction donnée. Pour cette raison, le résidu de cette fonction au point indiqué est donné par la formule (5):

$$\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{\sin 3z-3\sin z}{(\sin z-z)\sin z}=\lim_{z\to 0}\frac{\varphi_1(z)}{z\psi_1(z)}\,z=\frac{\varphi_1(0)}{\psi_1(0)}=\frac{-4}{-\frac{1}{6}}=24.$$

Calculer les résidus suivants:

308. $\operatorname*{Res}_{z=0}\dfrac{z^{n-1}}{\sin^n z}\ (n=1,\ 2,\ \dots).$

309. $\operatorname*{Res}_{z=0}\dfrac{\sin 2z-2z}{(1-\cos z)^2}.$

310. $\operatorname*{Res}_{z=0}\dfrac{e^z-1-z}{(1-\cos 2z)\sin z}.$

311. $\operatorname*{Res}_{z=0}\dfrac{(1-\operatorname{ch} z)\operatorname{sh} z}{(1-\cos z)\sin^2 z}.$

312. $\operatorname*{Res}_{z=0}\dfrac{z^{n-2}}{\operatorname{sh}^n z}\ (n=2,\ 3,\ \dots).$

313. $\operatorname*{Res}_{z=0}\dfrac{z^2}{\operatorname{ch} z-1-\dfrac{z^2}{2}}.$

EXEMPLE 6. Trouver les résidus de la fonction $f(z)=\dfrac{e^{1/z}}{1-z}$ en ses points singuliers.

SOLUTION. Les points singuliers de la fonction donnée sont: $z=1$ et $z=0$. Le point $z=1$ est un pôle simple, donc

$$\operatorname*{Res}_{z=1}f(z)=\left.\frac{e^{1/z}}{-1}\right|_{z=1}=-e.$$

Pour déterminer le caractère du point singulier $z=0$, développons la fonction donnée en série de Laurent au voisinage de ce point. On a

$$e^{1/z}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!\,z^2}+\frac{1}{3!\,z^3}+\dots,$$

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+z^3+\dots$$

En multipliant entre elles ces séries, on obtient

$$\frac{e^{1/z}}{1-z}=\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!\,z^2}+\frac{1}{3!\,z^3}+\dots\right)(1+z+z^2+z^3+\dots)=$$

$$=\left(1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots\right)\frac{1}{z}+c_{-2}\frac{1}{z^2}+\dots+\ \text{la partie régulière},$$

où $c_{-k}\neq 0$, $k=2,\ 3,\ \dots$

Etant donné que la partie principale de la série de Laurent contient une infinité de termes à puissances négatives de z, le point $z=0$ est un point singulier essentiel de la fonction considérée. Le résidu au point $z=0$ de cette fonc-

tion sera

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = c_{-1} = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots = e - 1.$$

EXEMPLE 7. Trouver le résidu de la fonction $f(z) = \cos z \sin \frac{1}{z}$ en son point singulier $z = 0$.

SOLUTION. Pour déterminer le caractère du point singulier qui nous intéresse, développons la fonction donnée en série de Laurent au voisinage du point $z = 0$. On a

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots,$$

$$\sin \frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!\,z^3} + \frac{1}{5!\,z^5} - \ldots,$$

En multipliant entre elles ces séries, on obtient

$$f(z) = \cos z \sin \frac{1}{z} = \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots\right)\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!\,z^3} + \frac{1}{5!\,z^5} - \ldots\right) =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2!\,3!} + \frac{1}{4!\,5!} + \ldots\right)\frac{1}{z} - \left(\frac{1}{0!\,3!} + \frac{1}{2!\,5!} + \frac{1}{4!\,7!} + \ldots\right)\frac{1}{z^3} + \ldots +$$

la partie régulière.

Donc, au voisinage du point $z = 0$, la série de Laurent est de la forme

$$\cos z \sin \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!\,(2n+1)!}\,\frac{1}{z} + c_{-3}\frac{1}{z^3} + \ldots + \text{ la partie régulière,}$$

où $c_{-(2k-1)} \neq 0$, $k = 1, 2, \ldots$

La partie principale de la série de Laurent contient une infinité de termes, ce qui signifie que le point $z = 0$ est un point singulier essentiel de la fonction donnée. Le résidu cherché sera donc

$$\operatorname*{Res}_{z=0}\left(\cos z \sin \frac{1}{z}\right) = c_{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!\,(2n+1)!}.$$

EXEMPLE 8. Trouver le résidu de la fonction

$$w = z^2 \sin \frac{1}{z+1}$$

en son point singulier.

SOLUTION. La fonction donnée admet comme point singulier le point $z = -1$. Pour déterminer le caractère de ce point, développons la fonction en série de Laurent au voisinage du point $z = -1$. Pour ce faire, exprimons z^2 à l'aide des puissances de la différence $z - (-1) = z + 1$. On a

$$z^2 = [(z+1) - 1]^2 = (z+1)^2 - 2(z+1) + 1. \tag{1}$$

Pour la fonction $\sin \frac{1}{z+1}$, la série de Laurent au voisinage du point $z = -1$ est de la forme

$$\sin \frac{1}{z+1} = \frac{1}{z+1} - \frac{1}{3!\,(z+1)^3} + \frac{1}{5!\,(z+1)^5} - \ldots \tag{2}$$

En multipliant entre elles les expressions (1) et (2), on trouve

$$w=z^2 \sin\frac{1}{z+1}=$$

$$=[(z+1)^2-2(z+1)+1]\left[\frac{1}{z+1}-\frac{1}{3!(z+1)^3}+\frac{1}{5!(z+1)^5}-\dots\right]=$$

$$=\left(1-\frac{1}{3!}\right)\frac{1}{z+1}+\frac{2}{3!}\frac{1}{(z+1)^2}+\left(\frac{1}{5!}-\frac{1}{3!}\right)\frac{1}{(z+1)^3}+\dots$$

$$\dots+[-2+(z+1)].$$

La série de Laurent contient une infinité de termes à puissances négatives de la somme $z+1$. On conclut donc que le point $z=-1$ est un point singulier essentiel de la fonction donnée et que son résidu en ce point sera

$$\operatorname*{Res}_{z=-1} w=1-\frac{1}{3!}=\frac{5}{6}.$$

EXEMPLE 9. Trouver le résidu de la fonction

$$f(z)=e^{1/z^2}\cos z$$

au point $z=0$.

SOLUTION. Etant donné que le résidu au point $z=0$ est égal au coefficient de z^{-1}, il est évident que ce résidu sera nul, car la fonction $f(z)$ est une fonction paire et son développement en série au voisinage du point $z=0$ ne peut contenir de puissances impaires de z.

Trouver les résidus des fonctions suivantes en leurs points singuliers

314. $f(z)=\dfrac{\operatorname{tg} z}{z^2-\frac{\pi}{4}z}$.

315. $f(z)=z^3e^{1/z}$.

316. $f(z)=\dfrac{\operatorname{ch} z}{(z^2+1)(z-3)}$.

317. $f(z)=\dfrac{e^z}{\frac{1}{4}-\sin^2 z}$.

318. $f(z)=\dfrac{e^z}{z^3(z-1)}$.

319. $f(z)=\dfrac{z}{(z+1)^3(z-2)^2}$.

320. $f(z)=\dfrac{e^{-\frac{1}{z^2}}}{1+z^4}$.

321. $f(z)=z^2\sin\dfrac{1}{z}$.

322. $f(z)=\cos\dfrac{1}{z}+z^3$.

323. $f(z)=\dfrac{\sin 2z}{(z+i)\left(z-\frac{i}{2}\right)^2}$.

324. $f(z)=\dfrac{1-\cos z}{z^3(z-3)}$.

325. $f(z)=e^{z^2+\frac{1}{z^2}}$.

326. $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{(z^2-1)(z+3)}$.

327. $f(z)=\dfrac{\cos z}{z^3-\frac{\pi}{2}z^2}$.

328. $f(z)=\dfrac{e^{\pi z}}{z-i}$.

329. $f(z)=\dfrac{z^{2n}}{(z-1)^n}$ ($n>0$ est un entier).

330. $f(z) = \operatorname{cotg}^2 z.$

331. $f(z) = \sin z \cos \frac{1}{z}.$

332. $f(z) = e^{\frac{z}{z-1}},$

333. $f(z) = \frac{\sin \frac{1}{z}}{1-z}.$

334. $f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{1+z}.$

335. $f(z) = e^{\frac{z^2+1}{z}}.$

336. $f(z) = e^z \sin \frac{1}{z}.$

§ 10. Théorème des résidus de Cauchy. Applications des résidus au calcul des intégrales définies. Sommation de certaines séries à l'aide des résidus

I. THÉORÈME DES RÉSIDUS DE CAUCHY

THÉORÈME. *Si une fonction $f(z)$ est analytique sur la frontière C d'un domaine D et partout à l'intérieur de ce domaine, sauf en un nombre fini de points singuliers $z_1, z_2, \ldots, z_n$, alors*

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res} f(z_k).$$

EXEMPLE 1. Calculer l'intégrale $\int\limits_{|z|=4} \frac{e^z-1}{z^2+z}\,dz.$

SOLUTION. Dans le domaine $|z| < 4$, la fonction $f(z) = \frac{e^z-1}{z^2+z}$ est analytique partout, sauf aux points $z=0$ et $z=-1$.

D'après le théorème des résidus de Cauchy,

$$\int\limits_{|z|=4} \frac{e^z-1}{z^2+z}\,dz = 2\pi i\,(\operatorname{Res} f(0) + \operatorname{Res} f(-1)).$$

Le point $z=0$ constitue un point singulier éliminable de la fonction $f(z)$, car

$$\lim_{z\to 0} \frac{e^z-1}{(z+1)} = 1.$$

Pour cette raison, $\operatorname{Res} f(0) = 0$. Le point $z=-1$ est un pôle d'ordre 1 et

$$\operatorname{Res} f(-1) = \lim_{z\to -1} \left\{ \frac{e^z-1}{z(z+1)}(z+1) \right\} = 1 - e^{-1}.$$

De cette façon,

$$\int\limits_{|z|=4} \frac{e^z-1}{z^2+z}\,dz = 2\pi i\,(1-e^{-1}).$$

EXEMPLE 2. Calculer l'intégrale $\int\limits_{|z|=2} \operatorname{tg} z\, dz$.

SOLUTION. Dans le domaine $D: |z| < 2$, la fonction $f(z) = \operatorname{tg} z$ est analytique partout, sauf aux points $z = \frac{\pi}{2}$ et $z = -\frac{\pi}{2}$ qui sont des pôles simples. Tous les autres points singuliers $z_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$ de la fonction $f(z) = \operatorname{tg} z$ se situent en dehors du domaine D et, pour cette raison, ils ne sont pas pris en considération.

On a

$$\operatorname{Res} f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left.\frac{\sin z}{(\cos z)'}\right|_{z=\frac{\pi}{2}} = -1, \qquad \operatorname{Res} f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \left.\frac{\sin z}{(\cos z)'}\right|_{z=-\pi/2} = -1.$$

C'est pour cela que

$$\int\limits_{|z|=2} \operatorname{tg} z\, dz = -4\pi i.$$

EXEMPLE 3. Calculer l'intégrale $\int\limits_{|z-i|=3/2} \frac{e^{1/z^2}}{z^2+1}\, dz$.

SOLUTION. Dans le domaine $D: |z-i| < 3/2$, la fonction $f(z) = \frac{e^{1/z^2}}{z^2+1}$ possède deux points singuliers: $z = i$, qui est un pôle d'ordre 1, et $z = 0$ qui est un point singulier essentiel.

D'après la formule (5) du § 9, on a

$$\operatorname{Res} f(i) = \left.\frac{e^{1/z^2}}{2z}\right|_{z=i} = \frac{e^{-1}}{2i}.$$

Pour trouver le résidu au point $z = 0$, il faut effectuer le développement en série de Laurent de la fonction $f(z)$ au voisinage du point $z = 0$. Toutefois, dans le cas examiné, il n'est pas nécessaire d'effectuer ce développement, car $f(z)$ est une fonction paire, ce qui permet d'affirmer que son développement de Laurent ne contiendra que les puissances paires de z et de $\frac{1}{z}$. Donc $c_{-1} = 0$ et, par conséquent,

$$\operatorname{Res} f(0) = 0.$$

D'après le théorème des résidus de Cauchy, on a

$$\int\limits_{|z-i|=3/2} \frac{e^{1/z^2}}{z^2+1}\, dz = \frac{\pi}{e}.$$

EXEMPLE 4. Calculer l'intégrale

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{1}{z-1} \sin\frac{1}{z}\, dz.$$

SOLUTION. Dans le disque $|z| \leqslant 2$, la fonction figurant sous le signe d'intégration présente deux points singuliers: $z = 1$ et $z = 0$. Il est aisé d'éta-

blir que $z = 1$ est un pôle simple, donc

$$\operatorname*{Res}_{z=1}\left(\frac{1}{z-1}\sin\frac{1}{z}\right)=\left.\frac{\sin\frac{1}{z}}{(z-1)'}\right|_{z=1}=\sin 1.$$

Pour déterminer le caractère du point singulier $z = 0$, développons la fonction $\frac{1}{z-1}\sin\frac{1}{z}$ en série de Laurent au voisinage de ce point. Cela nous donne

$$\frac{1}{z-1}\sin\frac{1}{z}=-\frac{1}{1-z}\sin\frac{1}{z}=$$

$$=-(1+z+z^2+\ldots)\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{3!\,z^3}+\frac{1}{5!\,z^5}-\ldots\right)=$$

$$=-\left(1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}-\ldots\right)\frac{1}{z}+\frac{c_{-2}}{z^2}+\frac{c_{-3}}{z^3}+\ldots+\text{la partie régulière,}$$

$$c_{-k}\neq 0,\quad k=2,\ 3,\ \ldots$$

Etant donné que la série de Laurent contient une infinité de termes à puissances négatives de z, le point $z = 0$ est un point singulier essentiel. Le résidu de la fonction sous le signe d'intégration en ce point sera

$$\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{\sin\frac{1}{z}}{z-1}=c_{-1}=-\left(1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}-\ldots\right)=-\sin 1.$$

Par conséquent,

$$\int\limits_{|z|=2}\frac{1}{z-1}\sin\frac{1}{z}\,dz=2\pi i\,(\sin 1-\sin 1)=0.$$

Calculer les intégrales suivantes:

337. $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} z\operatorname{tg}\pi z\,dz.$

338. $\displaystyle\int\limits_{C}\frac{z\,dz}{(z-1)^2(z+2)}$, où $C: x^{2/3}+y^{2/3}=3^{2/3}$.

339. $\displaystyle\int\limits_{|z|=2}\frac{e^z\,dz}{z^3(z+1)}.$

340. $\displaystyle\int\limits_{|z-i|=3}\frac{e^{z^2}-1}{z^3-iz^2}\,dz.$

341. $\displaystyle\int\limits_{|z|=1/2} z^2\sin\frac{1}{z}\,dz.$

342. $\displaystyle\int\limits_{|z|=\sqrt{3}}\frac{\sin\pi z}{z^2-z}\,dz.$

343. $\displaystyle\int\limits_{|z+i|=4}\frac{z\,dz}{e^z+3}.$

344. $\displaystyle\int\limits_{|z|=1}\frac{z^2\,dz}{\sin^3 z\cos z}.$

345. $\displaystyle\int\limits_{|z-i|=1}\frac{e^z\,dz}{z^4+2z^2+1}.$

346. $\displaystyle\int\limits_{|z|=4}\frac{e^{iz}\,dz}{(z-\pi)^3}.$

347. $\int\limits_C \frac{\cos\frac{z}{2}}{z^2-4}\,dz, \quad C: \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1.$

348. $\int\limits_C \frac{e^{2z}}{z^3-1}\,dz, \quad C: x^2+y^2-2x=0.$

349. $\int\limits_C \frac{\sin \pi z}{(z^2-1)^2}\,dz, \quad C: \frac{x^2}{4}+y^2=1.$

350. $\int\limits_C \frac{z+1}{z^2+2z-3}\,dz, \quad C: x^2+y^2=16.$

351. $\int\limits_C \frac{z\sin z}{(z-1)^5}\,dz, \quad C: \frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{9}=1.$

352. $\int\limits_C \frac{dz}{z^4+1}, \quad C: x^2+y^2=2x.$ 353. $\int\limits_{|z|=1} z^3 \sin\frac{1}{z}\,dz.$

354. $\int\limits_{|z|=1/3} (z+1)\, e^{1/z}\,dz.$ 355. $\int\limits_{|z|=2/3} \left(\sin\frac{1}{z^2}+e^{z^2}\cos z\right) dz.$

RÉSIDU D'UNE FONCTION PAR RAPPORT AU POINT À L'INFINI

On dit qu'une fonction $f(z)$ *est analytique au point à l'infini* $z=\infty$ si la fonction

$$\varphi(\zeta)=f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$$

est analytique au point $\zeta=0$.

Par exemple, la fonction $f(z)=\sin\frac{1}{z}$ est analytique au point $z=\infty$. étant donné que la fonction

$$\varphi(\zeta)=f\left(\frac{1}{\zeta}\right)=\sin\zeta$$

est analytique au point $\zeta=0$.

Soit $f(z)$ une fonction analytique dans un certain voisinage du point à l'infini (excepté le point à l'infini $z=\infty$ lui-même).

Le point $z=\infty$ est appelé *point singulier isolé* de la fonction $f(z)$ si cette fonction ne possède pas d'autres points singuliers dans un certain voisinage de ce point.

A l'infini, la fonction $f(z)=\frac{1}{\sin z}$ possède une singularité non isolée: les pôles $z_k=k\pi$ de cette fonction s'accumulent à l'infini si $k\to\infty$.

On dit que $z=\infty$ est un point singulier éliminable, un pôle ou un point singulier essentiel de la fonction $f(z)$ si la limite $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$ est respectivement finie, infinie ou si elle n'existe pas.

Les critères déterminant le type d'un point singulier à l'infini liés au développement de Laurent diffèrent de ceux adoptés pour les points singuliers à distance finie.

THÉORÈME 1. *Si $z = \infty$ est un point singulier éliminable d'une fonction $f(z)$, le développement en série de Laurent de cette fonction au voisinage du point susmentionné ne contient pas de puissances positives de z; si $z = \infty$ est un pôle, le développement mentionné ci-dessus inclut un nombre fini de puissances positives de z, tandis que pour une singularité essentielle, le nombre des puissances positives de z devient infini.*

De plus, nous allons appeler développement en série de Laurent d'une fonction $f(z)$ au voisinage du point à l'infini un développement de ce type qui converge partout en dehors d'un disque de centre au point $z = 0$ et de rayon R suffisamment grand (sauf peut-être au point $z = \infty$ lui-même).

Soit $f(z)$ une fonction analytique dans un certain voisinage du point $z = \infty$ (sauf peut-être en ce point lui-même).

On appelle résidu de la fonction $f(z)$ au point à l'infini la grandeur

$$\operatorname{Res} f(\infty) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^-} f(z)\, dz, \tag{1}$$

où γ^- est une circonférence suffisamment grande $|z| = \rho$ parcourue dans le sens horaire (le voisinage du point $z = \infty$ se trouve toujours à gauche comme c'était le cas pour un point à distance finie $z = a$).

De la définition qui vient d'être formulée il découle que le résidu d'une fonction $f(z)$ au point à l'infini est égal au coefficient à signe inverse de z^{-1} dans le développement en série de Laurent de cette fonction au voisinage du point $z = \infty$:

$$\operatorname{Res} f(\infty) = -c_{-1}. \tag{2}$$

EXEMPLE 5. Pour la fonction $f(z) = \frac{z+1}{z}$, on a $f(z) = 1 + \frac{1}{z}$. Cette expression peut être considérée en tant que développement en série de Laurent de la fonction au voisinage du point à l'infini. Il est évident que

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = 1,$$

de façon que le point $z = \infty$ est un point singulier éliminable et, comme d'habitude, nous posons $f(\infty) = 1$. Ici $c_{-1} = 1$, donc,

$$\operatorname{Res} f(\infty) = -1.$$

Cet exemple montre que le résidu d'une fonction analytique par rapport à un point singulier éliminable situé à l'infini peut être, contrairement à ce qui a lieu pour un point singulier éliminable à distance finie, différent de zéro.

Les développements connus des fonctions e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$ peuvent également être considérés en tant que développements en série de Laurent au voisinage du point $z = \infty$. Etant donné que les développements en question contiennent une infinité de puissances positives de z, les fonctions susmentionnées présentent au point $z = \infty$ une singularité essentielle.

THÉORÈME 2. *Si une fonction $f(z)$ possède un nombre fini de points singuliers dans le plan complexe élargi, alors la somme de tous ses résidus, y compris le résidu à l'infini, est nulle.*

De cette façon, si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont des points singuliers à distance finie de la fonction $f(z)$, alors

$$\operatorname{Res} f(\infty) + \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res} f(a_k) = 0$$

ou

$$\operatorname{Res} f(\infty) = -\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res} f(a_k). \tag{3}$$

La dernière relation rend commode le calcul de certaines intégrales.

EXEMPLE 6. Calculer l'intégrale

$$I = \int_{|z|=2} \frac{dz}{1+z^4}.$$

SOLUTION. La fonction figurant sous le signe d'intégration

$$f(z) = \frac{1}{1+z^4}$$

a comme pôles (à distance finie) les racines z_1, z_2, z_3, z_4 de l'équation $z^4 = -1$ qui sont toutes situées à l'intérieur de la circonférence $|z| = 2$. Au voisinage du point à l'infini, la fonction $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$ admet le développement

$$f(z) = \frac{1}{1+z^4} = \frac{1}{z^4} \frac{1}{1+\frac{1}{z^4}} = \frac{1}{z^4} - \frac{1}{z^8} + \frac{1}{z^{12}} - \ldots,$$

et l'on voit que $\operatorname{Res} f(\infty) = -c_{-1} = 0$. En vertu de l'égalité (3), on a

$$I = 2\pi i \sum_{k=1}^{4} \operatorname{Res} f(z_k) = -2\pi i \operatorname{Res} f(\infty) = 0.$$

EXEMPLE 7. Calculer l'intégrale

$$I = \int_{|z|=3} \frac{z^{17}}{(z^2+2)^3 (z^3+3)^4} dz.$$

SOLUTION. La fonction sous le signe d'intégration

$$f(z) = \frac{z^{17}}{(z^2+2)^3 (z^3+3)^4}$$

possède à l'intérieur de la circonférence $|z| = 3$ cinq points singuliers qui sont des pôles multiples. Si l'on appliquait le théorème des résidus principal, les calculs seraient trop encombrants. Pour simplifier les choses, utilisons l'égalité (3), en vertu de laquelle on a

$$I = -2\pi i \operatorname{Res} f(\infty). \tag{3'}$$

Etant donné que la fonction $f(z)$ peut être mise sous la forme

$$f(z) = \frac{z^{17}}{(z^2+2)^3 (z^3+3)^4} = \frac{z^{17}}{z^6 \left(1+\frac{2}{z^2}\right)^3 \left(1+\frac{3}{z^3}\right)^4 z^{12}} =$$

$$= \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{2}{z^2}\right)^3 \left(1+\frac{3}{z^3}\right)^4},$$

on voit que la partie régulière du développement en série de Laurent de cette fonction au voisinage du point à l'infini $z = \infty$ commence par le terme $1/z$. Par conséquent, $\operatorname{Res} f(\infty) = -1$. En portant cette grandeur dans l'égalité (3), on obtient $I = 2\pi i$.

Déterminer le caractère du point à l'infini pour les fonctions suivantes:

356. $f(z) = \dfrac{z^3 - z^2 + z + 6}{z^2}$. **357.** $f(z) = \dfrac{z+1}{z^4}$. **358.** $f(z) = \dfrac{e^z}{z^2}$.

359. $f(z) = \cos \dfrac{1}{z}$. **360.** $f(z) = e^{1/z^2}$. **361.** $f(z) = z^3 e^{1/z}$.

362. Soit $f(z)$ une fonction qui peut être mise sous la forme $f(z) = \varphi\left(\frac{1}{z}\right)$, où $\varphi(\zeta)$ est une fonction analytique au point $\zeta = 0$. Montrer que $\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -\varphi'(0)$.

En utilisant le résidu par rapport au point à l'infini, calculer les intégrales suivantes:

363. $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{z^2+1}{z^3}\, dz.$ **364.** $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{dz}{1+z^{12}}.$

365. $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{1000z+2}{1+z^{1224}}\, dz.$ **366.** $\displaystyle\int_{|z|=3} \frac{e^z}{z-1}\, dz.$

367. $\displaystyle\int_{|z|=1} z^2 \sin \frac{1}{z}\, dz.$ **368.** $\displaystyle\int_{|z|=3} \frac{z^9}{z^{10}-1}\, dz.$

II. APPLICATION DES RÉSIDUS AU CALCUL DES INTÉGRALES DÉFINIES

1. INTÉGRALES DES FONCTIONS RATIONNELLES. Soit $f(x)$ une fonction rationnelle de la forme $f(x) = \dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, où $P_m(x)$ et $Q_n(x)$ sont des polynômes de puissances m et n respectivement. Si $f(x)$ est continue sur l'axe réel tout entier ($Q_n(x) \neq 0$) et si $n \geqslant m+2$, c'est-à-dire si la puissance du dénominateur dépasse d'au moins deux unités celle du numérateur, alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 2\pi i \sigma, \tag{4}$$

où l'on désigne par σ la somme des résidus de la fonction $f(z) = \dfrac{P_m(z)}{Q_n(z)}$ en tous les pôles situés dans le demi-plan supérieur.

EXEMPLE 8. Calculer l'intégrale

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+a^2)^2} \quad (a > 0).$$

SOLUTION. Etant donné que la fonction $f(x)=\frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}$, on a

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^2}.$$

Introduisons la fonction $f(z)=\frac{z^2}{(z^2+a^2)^2}$ qui coïncide avec la fonction $f(x)$ sur l'axe réel, c'est-à-dire pour $z=x$. La fonction $f(z)$ possède un pôle d'ordre 2 dans le demi-plan supérieur au point $z=ai$. Le résidu de $f(z)$ par rapport à ce pôle sera

$$\text{Res}\, f(ai)=\lim_{z\to ai}\frac{d}{dz}[f(z)(z-ai^2)]=\lim_{z\to ai}\frac{d}{dz}\left[\frac{z^2}{(z+ai)^2}\right]=$$

$$=\lim_{z\to ai}\frac{2aiz}{(z+ai)^3}=\frac{1}{4ai}$$

En utilisant la formule (4), on obtient

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^2}=\frac{1}{2}\cdot 2\pi i\cdot\frac{1}{4ai}=\frac{\pi}{4a}.$$

Calculer les intégrales suivantes à limites d'intégration infinies

369. $\int_0^{\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx.$

370. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ $(a>0, b>0)$.

371. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^3}.$

372. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}}.$

373. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\,dx}{(x^2+4x+13)^2}.$

374. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)^2(x^2+b^2)^2}.$

375. $\int_0^{+\infty}\frac{x^4+1}{x^6+1}dx.$

376. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}dx.$

377. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^6}.$

378. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+2x+2)^2}.$

379. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^4\,dx}{(a+bx^2)^4}$ $(a>0,\ b>0)$.

380. Démontrer la formule $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}}=\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}\pi.$

2. INTÉGRALES DU TYPE

$$\int_0^\infty R(x) \cos \lambda x \, dx, \qquad \int_0^\infty R(x) \sin \lambda x \, dx,$$

où $R(x)$ est une fraction propre rationnelle, $\lambda > 0$ étant n'importe quel nombre réel.

Pour effectuer le calcul des intégrales de ce type, il est commode d'appliquer le *lemme de Jordan* suivant:

Soit $g(z)$ une fonction analytique dans le demi-plan supérieur $(0 < \operatorname{Arg} z < \pi)$ *sauf en un nombre fini de points singuliers, qui tend, dans ce demi-plan, vers zéro pour $|z| \to \infty$. Alors, pour $\lambda > 0$,*

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} g(z) e^{i\lambda z} \, dz = 0,$$

où le contour d'intégration C_R est représenté par une demi-circonférence de rayon R centrée au point 0 et située dans le demi-plan supérieur (fig. 7).

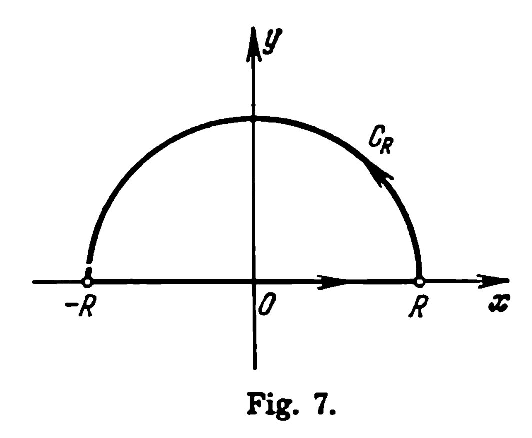


Fig. 7.

EXEMPLE 9. Calculer l'intégrale

$$I = \int_0^\infty \frac{x \sin ax}{x^2+k^2} \, dx \quad (a > 0, \ k > 0).$$

SOLUTION. Introduisons la fonction auxiliaire

$$f(z) = \frac{ze^{iaz}}{z^2+k^2}.$$

Il est aisé de remarquer que si $z = x$, alors $\operatorname{Im} f(x)$ coïncide avec la fonction sous le signe d'intégration $\varphi(x) = \frac{x \sin ax}{x^2+k^2}$. Considérons le contour représenté sur la figure 7. Si R est suffisamment grand, la fonction $g(z) = \frac{z}{z^2+k^2}$ satisfait sur le contour C_R à l'inégalité $|g(z)| < \frac{R}{R^2-k^2}$, donc, $g(z)$ tend vers zéro pour $R \to \infty$. D'après le lemme de Jordan, on a

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{ze^{iaz}}{z^2+k^2} \, dz = 0. \tag{5}$$

D'après le théorème des résidus, pour tout $R > k$, on a

$$\int_{-R}^{R} \frac{xe^{iax}}{x^2+k^2} \, dx + \int_{C_R} \frac{ze^{iaz}}{z^2+k^2} \, dz = 2\pi i \sigma,$$

où

$$\sigma = \operatorname*{Res}_{z=ik} \left[\frac{ze^{iaz}}{z^2+k^2}\right] = \lim_{z\to ik} \left[\frac{ze^{iaz}}{z^2+k^2}(z-ik)\right] = \frac{1}{2} e^{-ak}.$$

A la limite, pour $R \to \infty$ et compte tenu de la relation (5), on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{iax}}{x^2+k^2} \, dx = \pi i e^{-ak}.$$

En séparant les parties réelles et imaginaires dans les deux membres, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin ax}{x^2+k^2}\, dx = \pi e^{-ak}.$$

Etant donné que la fonction figurant sous le signe d'intégration est paire, on obtient finalement

$$I = \frac{\pi}{2} e^{-ak}.$$

EXEMPLE 10. Trouver la représentation intégrale de la fonction dite échelon unité de Heaviside $f(t) = \begin{cases} 0 \text{ pour } t < 0, \\ 1 \text{ pour } t > 0. \end{cases}$

SOLUTION. Considérons la fonction

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{-izt}}{z}\, dz,$$

où le contour d'intégration C est celui représenté sur la figure 8.

En fermant le contour à l'aide de la demi-circonférence C_R située dans le demi-plan supérieur, on peut remarquer que, pour $t < 0$, en vertu du lemme de Jordan, les intégrales

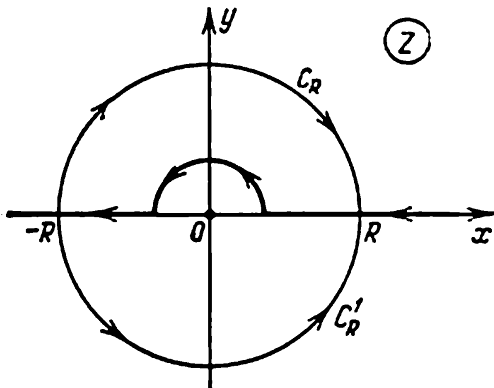


Fig. 8.

$$\int_{C_R} \frac{e^{-izt}}{z}\, dz \to 0 \qquad \text{pour} \qquad R \to \infty,$$

et, compte tenu du fait que la fonction figurant sous le signe d'intégration est analytique dans un domaine muni d'un tel contour fermé, on a $f(t) = 0$ pour $t < 0$.

Fermons maintenant le contour au moyen de la demi-circonférence C_R^1 qui se trouve dans le demi-plan inférieur. Maintenant, pour $t > 0$, on trouve de nouveau, en vertu du lemme de Jordan, que les intégrales

$$\int_{C_R^1} \frac{e^{-izt}}{z}\, dz \to 0 \qquad \text{pour} \qquad R \to \infty.$$

Mais dans ce dernier cas, le point $z = 0$ se trouve à l'intérieur du contour d'intégration. Cela signifie qu'en vertu du théorème des résidus de Cauchy,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{-izt}}{z}\, dz = 1 \quad (t > 0).$$

Donc,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{-izt}}{z}\, dz = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad t < 0, \\ 1 & \text{pour} \quad t > 0. \end{cases}$$

De cette façon, l'intégrale considérée représente une fonction discontinue.

Calculer les intégrales suivantes:

381. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos x \, dx}{x^2-2x+10}$.   382. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2+4x+20} dx$.

383. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos x \, dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$.   384. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x \, dx}{x^2+9}$.

385. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos ax}{1+x^4} dx \quad (a>0)$.   386. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2} dx \quad (a>0)$.

387. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos mx}{a^2+x^2} dx \quad (m>0, \ a>0)$.   388. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x \sin x}{1+x^2+x^4} dx$.

389. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \lambda x}{(x^2+1)(x^2+9)} \quad (\lambda>0)$.   390. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^3 \sin ax}{(1+x^2)^2} dx \quad (a>0)$.

391. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^2 \cos x \, dx}{(x^2+1)^2}$.   392. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{3x^2-a^2}{(x^2+b^2)^2} \cos mx \, dx$.

EXEMPLE 11. Calculer l'intégrale

$$I = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)} dx \quad (a>0, \ b>0). \tag{6}$$

SOLUTION. Introduisons la fonction $f(z) = \frac{e^{iaz}}{z(z^2+b^2)}$ choisie de telle façon que, pour $z = x$, $\operatorname{Im} f(z)$ coïncide avec la fonction figurant sous le signe d'intégration dans (6). La fonction $f(z)$ présente une singularité sur l'axe réel: un pôle d'ordre 1 au point $z = 0$. C'est pour cela que l'on choisit le contour d'intégration comme indiqué sur la figure 9 (le point singulier $z = 0$ est contourné en suivant la petite demi-circonférence C_r $(r < b)$; la demi-circonférence C_R est choisie de sorte que $b < R$).

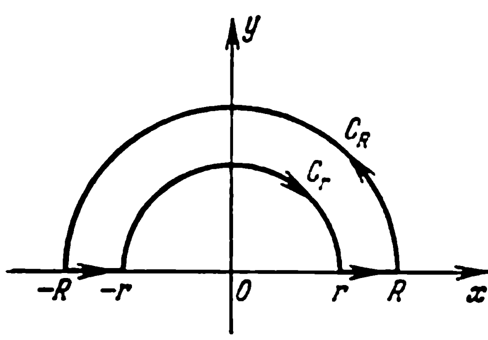


Fig. 9.

De cette façon, à l'intérieur du contour fermé il n'y a qu'un seul pôle de la fonction $f(z)$ situé au point $z = bi$. D'après le théorème des résidus de Cauchy,

$$\int\limits_{-R}^{-r} \frac{e^{iax}}{x(x^2+b^2)} dx + \int\limits_{C_r} \frac{e^{iaz}}{z(z^2+b^2)} dz + \int\limits_{r}^{R} \frac{e^{iax} dx}{x(x^2+b^2)} +$$

$$+ \int\limits_{C_R} \frac{e^{iaz}}{z(z^2+b^2)} dz = 2\pi i\sigma, \tag{7}$$

où

$$\sigma = \operatorname*{Res}_{z=bi} \frac{e^{iaz}}{z(z^2+b^2)} = \lim_{z\to bi} \frac{e^{iaz}(z-bi)}{z(z^2+b^2)} = -\frac{e^{-ab}}{2b^2}. \tag{8}$$

En substituant $-x$ à x dans la première intégrale de (7) et en réunissant celle-ci et la troisième intégrale, on obtient

$$\int_{-R}^{-r} \frac{e^{iax}}{x(x^2+b^2)}\,dx + \int_{r}^{R} \frac{e^{iax}}{x(x^2+b^2)}\,dx =$$

$$= \int_{r}^{R} \frac{e^{iax}-e^{-iax}}{x(x^2+b^2)}\,dx = 2i \int_{r}^{R} \frac{\sin ax\,dx}{x(x^2+b^2)}. \tag{9}$$

Etant donné que

$$\lim_{z\to 0} \frac{e^{iaz}}{z^2+b^2} = \frac{1}{b^2},$$

la fonction $\frac{e^{iaz}}{z(z^2+b^2)}$ figurant sous le signe d'intégration peut être mise sous la forme

$$\frac{e^{iaz}}{z(z^2+b^2)} = \frac{1}{b^2}\,\frac{1}{z} + \frac{\psi(z)}{z},$$

où $\lim_{z\to 0} \psi(z) = 0$. En posant $z = re^{i\varphi}$, on trouve

$$\int_{C_r} \frac{e^{iaz}\,dz}{z(z^2+b^2)} = \frac{1}{b^2}\int_{C_r} \frac{dz}{z} + \int_{C_r} \frac{\psi(z)}{z}\,dz = -\frac{i\pi}{b^2} + i\int_{\pi}^{0} \psi(re^{i\varphi})\,d\varphi. \tag{10}$$

La limite de l'intégrale du second membre de (10) est égale à zéro pour $r \to 0$

$$\lim_{r\to 0} \int_{\pi}^{0} \psi(re^{i\varphi})\,d\varphi = 0. \tag{11}$$

Finalement, d'après le lemme de Jordan, la quatrième intégrale dans le premier membre de (7) tend vers zéro pour $R \to \infty$, car la fonction $g(z) = \frac{1}{z(z^2+b^2)}$ tend vers zéro lorsque $|z| \to \infty$:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{e^{iaz}}{z(z^2+b^2)}\,dz = 0. \tag{12}$$

De cette façon, quand $R \to \infty$ et $r \to 0$, l'égalité (7) peut être mise, compte tenu des relations (8) à (12), sous la forme

$$2i \int_{0}^{\infty} \frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)}\,dx - \frac{\pi i}{b^2} = -\pi i\,\frac{e^{-ab}}{b^2},$$

d'où

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)}\,dx = \frac{\pi}{2b^2}(1-e^{-ab}).$$

Calculer les intégrales suivantes:

393. $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx.$ **394.** $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x(x^2+1)}\,dx.$

395. $\int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2}\,dx \quad (a>0,\ b>0).$ **396.** $\int_0^\infty \frac{\sin mx}{x(x^2+a^2)^2}\,dx.$

3. CALCUL DES INTÉGRALES CONTENANT UNE FONCTION EXPONENTIELLE

EXEMPLE 12. Calculer les intégrales de Fresnel

$$I_1 = \int_0^\infty \cos x^2\,dx, \qquad I_2 = \int_0^\infty \sin x^2\,dx,$$

si l'on sait que

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{13}$$

SOLUTION. Considérons la fonction auxiliaire $f(z) = e^{iz^2}$ et le contour indiqué sur la figure 10 (le secteur circulaire $OBAO$, où $OA = OB = R$ et $\widehat{BOA} = \pi/4$). A l'intérieur de ce contour, la fonction $f(z)$ est analytique et, d'après le théorème de Cauchy,

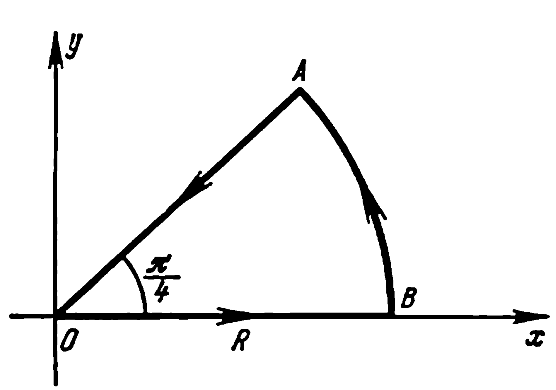


Fig. 10.

$$\int_{OBAO} e^{iz^2}dz = \int_0^R e^{ix^2}dx + \int_{C_R} e^{iz^2}dz + \int_{AO} e^{iz^2}dz = 0. \tag{14}$$

Nous allons montrer que

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} e^{iz^2}dz = 0. \tag{15}$$

En effet, si l'on pose $z^2 = \xi$, on obtient $dz = \frac{d\xi}{2\sqrt{\xi}}$ et

$$\int_{C_R} e^{iz^2}dz = \int_{\Gamma_{R^2}} \frac{e^{i\xi}}{2\sqrt{\xi}}\,d\xi,$$

où Γ_{R^2} représente un quart de l'arc du cercle de rayon R^2.

La fonction $g(\xi) = \frac{1}{2\sqrt{\xi}}$ satisfait aux conditions du lemme de Jordan, donc,

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{\Gamma_{R^2}} \frac{e^{i\xi}}{2\sqrt{\xi}}\, d\xi = \lim_{R\to\infty} \int\limits_{C_R} e^{iz^2} dz = 0.$$

Sur le segment $AO: z = \rho e^{i\frac{\pi}{4}}$, $z^2 = \rho^2 e^{i\frac{\pi}{2}} = \rho^2 i$, $0 \leqslant \rho \leqslant R$. D'où

$$\int\limits_{AO} e^{iz^2} dz = \int\limits_R^0 e^{-\rho^2} e^{i\frac{\pi}{4}} d\rho = -e^{i\frac{\pi}{4}} \int\limits_0^R e^{-\rho^2} d\rho. \tag{16}$$

En passant dans (14) à la limite pour $R \to \infty$ et compte tenu de (15), (16) et (13), on a

$$\int\limits_0^\infty e^{ix^2} dx = e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

ou

$$\int\limits_0^\infty \cos x^2\, dx + i \int\limits_0^\infty \sin x^2\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} + i\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

d'où l'on obtient

$$\int\limits_0^\infty \cos x^2\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \qquad \int\limits_0^\infty \sin x^2\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

EXEMPLE 13. Calculer l'intégrale

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}\, dx \quad (0 < a < 1).$$

SOLUTION. Choisissons comme fonction auxiliaire

$$f(z) = \frac{e^{az}}{1+e^z}$$

et le contour représenté sur la figure 11 (un rectangle de côtés $2R$ et 2π). A l'intérieur de ce contour, la fonction $f(z)$ est analytique, sauf au point $Z = \pi i$, où elle admet un pôle simple

$$\operatorname{Res} f(\pi i) = \left.\frac{e^{az}}{(1+e^z)'}\right|_{z=\pi i} = \frac{e^{a\pi i}}{e^{\pi i}} = -e^{a\pi i}.$$

D'après le théorème des résidus de Cauchy,

$$\int\limits_{DA} f(z)\, dz + \int\limits_{AB} f(z)\, dz + \int\limits_{BC} f(z)\, dz + \int\limits_{CD} f(z)\, dz = -2\pi i e^{a\pi i}. \tag{17}$$

Sur le segment $DA: z=x$, $-R \leqslant x \leqslant R$; c'est pour cela que

$$\int_{DA} = \int_{-R}^{R} \frac{e^{ax}}{1+e^x}\,dx. \tag{18}$$

Sur le segment AB: $z = R + iy$, $0 \leqslant y \leqslant 2\pi$; pour cette raison,

$$\left|\frac{e^{az}}{1+e^z}\right| = \left|\frac{e^{a(R+iy)}}{1+e^{R+iy}}\right| \leqslant \frac{e^{aR}}{e^R-1}.$$

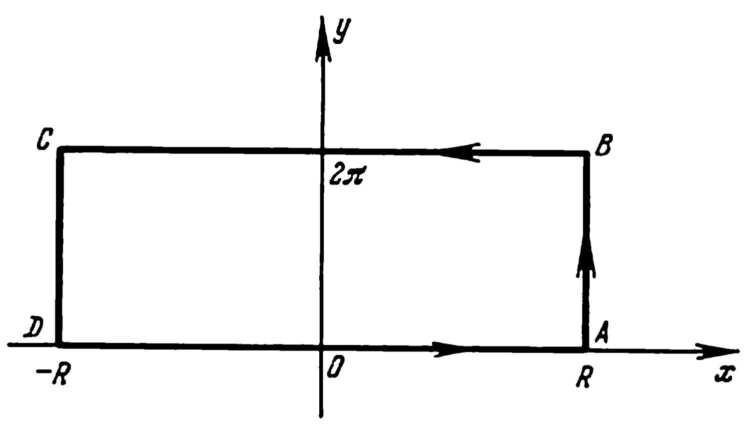


Fig. 11.

Cela signifie que

$$\left|\int_{AB}\right| \leqslant \int_0^{2\pi} \frac{e^{aR}}{e^R-1}\,dy = \frac{2\pi e^{aR}}{e^R-1} \to 0 \quad \text{pour} \quad R\to\infty \ (\text{car } 0<a<1). \tag{19}$$

D'une façon analogue, on obtient

$$\left|\int_{CD} f(z)\,dz\right| \leqslant \frac{e^{-aR}}{1-e^{-R}}\,2\pi \to 0 \quad \text{pour} \quad R\to\infty. \tag{20}$$

Sur le segment BC: $z = x + 2\pi i$, $-R \leqslant x \leqslant R$; c'est pour cela que

$$\int_{BC} = \int_{R}^{-R} \frac{e^{a(x+2\pi i)}}{1+e^{x+2\pi i}}\,dx = -e^{2a\pi i}\int_{-R}^{R} \frac{e^{ax}}{1+e^x}\,dx. \tag{21}$$

En passant dans (17) à la limite pour $R\to\infty$ et compte tenu de (18) à (21), on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}\,dx - e^{2a\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}\,dx = -2\pi i e^{a\pi i},$$

d'où

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}\,dx = \frac{2\pi i e^{a\pi i}}{e^{2a\pi i}-1} = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

Calculer les intégrales suivantes qui contiennent une fonction exponentielle:

397. $\int_0^{\infty} e^{-ax^2} \cos bx \, dx \quad (a > 0, \ b > 0).$

INDICATION. Poser $f(z) = e^{-az^2}$, le contour étant un rectangle de côtés $2R$ et $\frac{b}{2a}$.

398. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{1 + e^x} \, dx \quad (0 < a < 1, \ 0 < b < 1).$

INDICATION. Poser $f(z) = \frac{e^{az} - e^{bz}}{1 + e^z}$, le contour étant celui de la figure 11.

4. CALCUL DES INTÉGRALES DU TYPE

$$\int_0^{2\pi} R(\cos x, \ \sin x) \, dx, \tag{22}$$

où R est une fonction rationnelle d'arguments $\cos x$ et $\sin x$ bornée à l'intérieur de l'intervalle d'intégration.

On pose $e^{ix} = z$. Alors $dx = \frac{dz}{iz}$ et

$$\cos x = \frac{z^2 + 1}{2z}, \qquad \sin x = \frac{z^2 - 1}{2iz}.$$

Il est évident que, dans ce cas, $|z| = 1$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

L'intégrale (22) prend la forme

$$\int_C F(z) \, dz, \tag{23}$$

où C est un cercle de rayon unité centré sur l'origine des coordonnées. Conformément au théorème des résidus de Cauchy, l'intégrale (23) est égale à $2\pi\sigma i$, où σ est la somme des résidus par rapport aux pôles situés à l'intérieur du cercle unité C.

EXEMPLE 14. Calculer l'intégrale $I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(a + b\cos x)^2} \quad (a > b > 0).$

SOLUTION. En effectuant la substitution $e^{ix} = z$, on obtient à la suite de quelques transformations simples

$$I = \frac{4}{i} \int_C \frac{z \, dz}{(bz^2 + 2az + b)^2} = \frac{4}{i} 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res} F(z_k).$$

Si $a > b > 0$, à l'intérieur du cercle unité il n'y a qu'un seul pôle (de multi-

plicité 2)
$$z_1=\frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}.$$
Le résidu de la fonction $F(z)=\frac{z}{(bz^2+2az+b)^2}$ par rapport à ce pôle sera
$$\operatorname{Res} F(z_1)=\lim_{z\to z_1}\frac{d}{dz}\left\{\frac{z(z-z_1)^2}{b^2(z-z_1)^2(z-z_2)^2}\right\}=\frac{a}{4}(a^2-b^2)^{-3/2}.$$
Donc,
$$I=\frac{2\pi a}{(a^2-b^2)^{3/2}}.$$

Calculer les intégrales suivantes:

399. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dx}{1-2p\cos x+p^2}\quad(0<p<1).$

400. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2 3x\,dx}{1-2p\cos 2x+p^2}\quad(0<p<1).$

401. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\cos 2x\,dx}{1-2p\cos x+p^2}\quad(p>1).$

402. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\cos x\,dx}{1-2p\sin x+p^2}\quad(0<p<1).$ **403.** $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dx}{a+\cos x}\quad(a>1).$

404. $\displaystyle\int_0^{\pi}\operatorname{cotg}(x-a)\,dx\quad(\operatorname{Im} a>0).$

405. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2 x}{a+b\cos x}\,dx\quad(a>b>0).$

406. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dx}{1+a\cos x}\quad(0<a<1).$ **407.** $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dx}{a+b\cos x}\quad(0<b<a).$

III. SOMMATION DE CERTAINES SÉRIES À L'AIDE DES RÉSIDUS

1. Soit $f(z)$ une fonction analytique dans tout le plan complexe, sauf en un nombre fini de pôles $z_1, z_2, \ldots, z_k$ qui ne se confondent avec aucun des points $z=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, et supposons que la fonction $f(z)$ satisfait à la condition $f(z)=O(z^{-2})$ pour $z\to\infty$ *). Alors

*) La notation « $f(z)=O(g(z))$ pour $z\to\infty$ » veut dire que le rapport $\frac{f(z)}{g(z)}$ a une valeur limitée pour $z\to\infty$:
$$\left|\frac{f(z)}{g(z)}\right|\leqslant C,\quad \text{où}\quad C=\text{const},\quad C>0.$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = -\pi \sum_{m=1}^{k} \operatorname*{Res}_{z=z_m} [f(z) \operatorname{cotg} \pi z]. \qquad (24)$$

EXEMPLE 15. Trouver la somme de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2}$, où $a \neq 0$.

SOLUTION. Considérons la fonction

$$f(z) = \frac{1}{z^2+a^2}.$$

Cette fonction est analytique partout, sauf aux points $z_1 = ai$ et $z_2 = -ai$ qui sont des pôles simples. Etant donné que

$$f(z) = \frac{1}{z^2\left(1+\frac{a^2}{z^2}\right)},$$

il s'ensuit que

$$\frac{1}{z^2+a^2} = 0\,(z^{-2}) \qquad \text{pour} \qquad z \to \infty.$$

D'après la formule (24), on obtient

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = -\pi \left[\operatorname*{Res}_{z=ai} \frac{\operatorname{cotg} \pi z}{z^2+a^2} + \operatorname*{Res}_{z=-ai} \frac{\operatorname{cotg} \pi z}{z^2+a^2}\right].$$

Pour la fonction $\frac{\operatorname{cotg} \pi z}{z^2+a^2}$, les points $z_1 = ai$ et $z_2 = -ai$ sont des pôles simples, donc, ses résidus seront

$$\operatorname*{Res}_{z=z_k} \frac{\operatorname{cotg} \pi z}{z^2+a^2} = \frac{\operatorname{cotg} \pi z}{2z}\bigg|_{z=z_k} = \frac{\operatorname{cotg} \pi z_k}{2z_k}, \quad k=1,\ 2.$$

Alors

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = -\pi \left(\frac{\operatorname{cotg} \pi ai}{2ai} + \frac{\operatorname{cotg}(-\pi ai)}{-2ai}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{a} i \operatorname{cotg}(\pi ai) = \frac{\pi}{a} \coth \pi a.$$

La série figurant au premier membre de la dernière égalité peut être mise sous la forme:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = \cdots + \frac{1}{(-n)^2+a^2} + \cdots + \frac{1}{(-2)^2+a^2} + \frac{1}{(-1)^2+a^2} +$$

$$+ \frac{1}{0^2+a^2} + \frac{1}{1^2+a^2} + \frac{1}{2^2+a^2} + \cdots + \frac{1}{n^2+a^2} + \cdots =$$

$$=\frac{1}{a^2}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+a^2}.$$

D'ici on trouve que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+a^2}=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2+a^2}-\frac{1}{2a^2}.$$

La somme cherchée de cette série sera

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+a^2}=\frac{1}{2}\frac{\pi}{a}\coth\pi a-\frac{1}{2a^2}=\frac{\pi a\coth\pi a-1}{2a^2}.$$

Trouver les sommes des séries suivantes si a n'est pas un nombre entier

408. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-a^2}$.   409. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4-a^4}$.

410. $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(n+a)^2}$.   411. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$

2. Soit $f(z)$ une fonction analytique dans tout le plan complexe, sauf en un nombre fini de pôles $z_1, z_2, \ldots, z_k$ qui ne se confondent avec aucun des points $z=0, \pm1, \pm2, \ldots$, et supposons que cette fonction vérifie l'inégalité

$$|f(z)|\leqslant e^{a\,|\operatorname{Im} z|}\,\varepsilon(|z|), \tag{25}$$

où $\varepsilon(|z|)\to 0$ pour $z\to\infty$, $z\in G_\rho$; $0\leqslant a<\pi$. Ici on désigne par G_ρ tout le plan privé des disques $|z-z_m|\leqslant\rho$, $m=1, 2, \ldots, k$. Dans ce cas, la formule

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n f(n)=-\pi\sum_{m=1}^{k}\operatorname{Res}_{z=z_m}\frac{f(z)}{\sin\pi z} \tag{26}$$

est valable.

EXEMPLE 16. Trouver la somme de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+a^2},\quad a\neq 0.$$

SOLUTION. La fonction $f(z)=\frac{1}{z^2+a^2}$ possède deux pôles simples $z_1=ai$ et $z_2=-ai$ et elle satisfait à la condition (25), car

$$|f(z)|=\frac{1}{|z^2+a^2|}\leqslant\frac{1}{|z|^2-|a|^2},$$

ici $a=0$, $\varepsilon(|z|)=\frac{1}{|z|^2-|a|^2}\to 0$ pour $z\to\infty$.

En utilisant la formule (26), on obtient

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+a^2} = -\pi \left[\operatorname*{Res}_{z=ai} \frac{1}{(z^2+a^2)\sin \pi z} + \operatorname*{Res}_{z=-ai} \frac{1}{(z^2+a^2)\sin \pi z} \right].$$

On trouve les résidus de la fonction $\frac{1}{(z^2+a^2)\sin \pi z}$ aux points z_k, $k=1, 2$:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_k} \frac{1}{(z^2+a^2)\sin \pi z} = \frac{1}{2z_k \sin \pi z_k + (z_k^2+a^2)\, \pi \cos \pi z_k},$$

d'où

$$\operatorname*{Res}_{z=ai} \frac{1}{(z^2+a^2)\sin \pi z} = \frac{1}{2ai \sin \pi ai} = -\frac{1}{2a \operatorname{sh} \pi a}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=-ai} \frac{1}{(z^2+a^2)\sin \pi z} = -\frac{1}{2a \operatorname{sh} \pi a}.$$

Par conséquent,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+a^2} = \frac{1}{a \operatorname{sh} \pi a}$$

Ensuite, on obtient

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+a^2} = \ldots + \frac{(-1)^{-n}}{(-n)^2+a^2} + \ldots + \frac{(-1)^{-2}}{(-2)^2+a^2} + \frac{(-1)^{-1}}{(-1)^2+a^2} +$$

$$+ \frac{(-1)^0}{0^2+a^2} + \frac{(-1)^1}{1^2+a^2} + \frac{(-1)^2}{2^2+a^2} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n^2+a^2} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{a^2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+a^2}.$$

D'où

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+a^2} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+a^2} - \frac{1}{2a^2},$$

donc,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+a^2} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{\pi}{2a \operatorname{sh} \pi a} + \frac{1}{2a^2} = \frac{1}{2a^2} \left(1 + \frac{\pi a}{\operatorname{sh} \pi a}\right).$$

Trouver les sommes des séries suivantes en supposant que a n'est pas un nombre entier:

412. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+a)^2}$. **413.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$.

414. $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos \beta n}{n^2+a^2}, \quad -\pi<\beta<\pi.$

415. $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n^2+a^2)^2}.$

§ 11. Résidu logarithmique. Principe de l'argument. Théorème de Rouché

On appelle *dérivée logarithmique* d'une fonction $f(z)$ une fonction $\varphi(z)$ qui est la dérivée du logarithme de la fonction $f(z)$:

$$\varphi(z) = [\operatorname{Ln} f(z)]' = \frac{f'(z)}{f(z)}$$

La fonction $\varphi(z)$ n'admet comme points singuliers que les zéros ou les points singuliers de la fonction $f(z)$.

Le résidu de la dérivée logarithmique de la fonction $f(z)$ par rapport à un point qui est un zéro de cette fonction est égal à l'ordre de ce zéro; par rapport à un point qui constitue un pôle de la fonction indiquée, le résidu est égal à l'ordre de ce pôle pris avec le signe moins.

EXEMPLE 1. Trouver les résidus de la dérivée logarithmique de la fonction $f(z) = \frac{\sin z}{z+1}$ par rapport aux zéros et aux pôles de celle-ci.

SOLUTION. La fonction en question possède une infinité de zéros simples $z = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) et un pôle simple au point $z = -1$. D'où

$$\operatorname*{Res}_{z=k\pi} \frac{f'(z)}{f(z)} = 1 \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \qquad \operatorname*{Res}_{z=-1} \frac{f'(z)}{f(z)} = -1.$$

Trouver les résidus des dérivées logarithmiques des fonctions indiquées par rapport à leurs zéros et à leurs pôles:

416. $f(z) = \frac{\sin z}{z}$. **417.** $f(z) = \cos^3 z$.

418. a) $f(z) = \frac{\cos z}{z}$; b) $f(z) = \sin z$.

Soit $f(z) \neq 0$ une fonction analytique en tous les points d'un contour fermé C. La grandeur

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz$$

est appelée *résidu logarithmique de la fonction $f(z)$* par rapport au contour fermé C.

THÉORÈME DU RÉSIDU LOGARITHMIQUE. *Soit $f(z)$ une fonction analytique dans un domaine fermé D, sauf en un nombre fini de pôles, et supposons que sur la frontière C de ce domaine elle n'admette ni zéros ni pôles. Alors la différence entre le nombre des zéros et le nombre des pôles (compte tenu de leurs ordres) de $f(z)$ dans le domaine D sera égale au résidu logarithmique de la fonction $f(z)$*

par rapport au contour fermé C:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = N - P,$$

où N est le nombre des zéros de f (z) dans D, P étant le nombre des pôles de cette fonction dans le même domaine.

Le résidu logarithmique du polynôme

$$Q_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

par rapport au contour C est égal au nombre des zéros (compte tenu de leur multiplicité) dans le domaine D borné par le contour C.

EXEMPLE 2. Trouver le résidu logarithmique de la fonction $f(z) = \dfrac{\operatorname{ch} z}{e^{iz}-1}$ par rapport au contour C: $|z| = 8$.

SOLUTION. On trouve les zéros z_k de la fonction $f(z)$. A cette fin, il faut résoudre l'équation $\operatorname{ch} z = 0$ ou $e^z + e^{-z} = 0$. Après avoir mis la dernière équation sous la forme $e^{2z} = -1$, on trouve $2z = \operatorname{Ln}(-1) = (2k+1)\pi i$ et l'on a $z_k = \dfrac{2k+1}{2}\pi i$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ (tous les zéros sont simples). Pour trouver les pôles de la fonction $f(z)$, il faut résoudre l'équation $e^{iz} - 1 = 0$ ou $e^{iz} = 1$. On a $iz = \operatorname{Ln} 1 = 2m\pi i$, $z_m = 2m\pi$ $(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Dans le disque $|z| < 8$, on trouve les zéros

$$z_k = \frac{2k+1}{2}\pi i \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, -3)$$

et les pôles simples

$$z_m = 2mn \quad (m = 0, \pm 1)$$

de la fonction $f(z)$. Le nombre des zéros $N = 6$, le nombre des pôles $P = 3$. Par conséquent,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=8} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = 6 - 3 = 3.$$

EXEMPLE 3. Trouver le résidu logarithmique de la fonction

$$f(z) = \frac{1+z^2}{1-\cos 2\pi z}$$

par rapport à la circonférence $|z| = \pi$.

SOLUTION. En posant $1 + z^2 = 0$, on trouve deux zéros simples de la fonction $f(z)$: $a_1 = -i$, $a_2 = i$. On pose $1 - \cos 2\pi z = 0$ et l'on trouve les pôles de la fonction $f(z)$: $z_n = n$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Les pôles trouvés sont de multiplicité $k = 2$.

Dans le disque $|z| < \pi$, la fonction donnée possède deux zéros simples $a_1 = -i$, $a_2 = i$ et sept pôles de multiplicité 2:

$$z_1 = -3, \quad z_2 = -2, \quad z_3 = -1, \quad z_4 = 0, \quad z_5 = 1,$$
$$z_6 = 2, \quad z_7 = 3.$$

De cette façon, $N = 2$ et $P = 7$. En vertu du théorème du résidu logarithmique, on trouve que le résidu logarithmique de la fonction donnée par rapport

à la circonférence $|z| = \pi$ sera égal à

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=\pi} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2 - 7 \cdot 2 = -12.$$

Trouver les résidus logarithmiques des fonctions suivantes par rapport aux contours indiqués:

419. $f(z) = \frac{z}{1+z^3}, \quad |z| = 2.$

420. $f(z) = \cos z + \sin z, \quad |z| = 4.$

421. $f(z) = (e^z - 2)^2, \quad |z| = 8.$ **422.** $f(z) = \text{th}\, z, \quad |z| = 8.$

423. $f(z) = \text{tg}^3 z, \quad |z| = 6.$ **424.** $f(z) = 1 - \text{th}^2 z, \quad |z| = 2.$

PRINCIPE DE L'ARGUMENT. *Le résidu logarithmique d'une fonction $f(z)$ par rapport à un contour fermé C est égal à l'incrément $\Delta_C \arg f(z)$ de l'argument de la fonction $f(z)$, enregistré lors du parcours du contour C, divisé par 2π:*

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg f(z).$$

De cette façon, la différence entre le nombre des zéros et le nombre des pôles de la fonction $f(z)$ situés dans le domaine D sera

$$N - P = \frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg f(z).$$

Autrement dit, la différence $N - P$ est égale au nombre des rotations effectuées dans le plan des w par le vecteur, sortant du point $w = 0$ et allant au point $w = f(z)$, lorsque le point z décrit le contour C (le nombre des rotations est considéré positif si le vecteur tourne dans le sens antihoraire; dans le cas contraire, il est négatif).

Un cas particulier est à signaler: si la fonction $w = f(z)$ est analytique dans un domaine D et sur sa frontière C où elle ne s'annule pas, le résidu logarithmique de $f(z)$ par rapport à C est donné par le nombre des zéros de $f(z)$ dans D qui est égal à la variation de $\arg f(z)$, lors du parcours de C, divisée par 2π:

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg f(z) = N.$$

Cela a lieu, par exemple, pour le polynôme $Q_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k$.

EXEMPLE 4. Trouver le nombre des racines disposées dans le demi-plan droit $\text{Re}\, z > 0$ qui vérifient l'équation

$$Q_5(z) \equiv z^5 + z^4 + 2z^3 - 8z - 1 = 0.$$

SOLUTION. En vertu du principe de l'argument, le nombre des zéros à l'intérieur du contour C sera

$$N = \frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg Q_5(z),$$

où le contour C est constitué de la demi-circonférence C_R: $|z| = R$, $\text{Re}\, z > 0$

et de son diamètre disposé sur l'axe imaginaire; le rayon R est considéré tellement grand que tous les zéros du polynôme $Q_5(z)$ qui se trouvent dans le demi-plan droit se situent à l'intérieur du demi-disque $|z| < R$, $\operatorname{Re} z > 0$. On a

$$Q_5(z) = z^5\left(1+\frac{1}{z}+\frac{2}{z^2}-\frac{8}{z^4}-\frac{1}{z^5}\right).$$

D'où

$$\arg Q_5(z) = \arg\left[z^5\left(1+\frac{1}{z}+\frac{2}{z^2}-\frac{8}{z^4}-\frac{1}{z^5}\right)\right] =$$

$$= \arg z^5 + \arg\left(1+\frac{1}{z}+\frac{2}{z^2}-\frac{8}{z^4}-\frac{1}{z^5}\right) =$$

$$= 5\arg z + \arg\left(1+\frac{1}{z}+\frac{2}{z^2}-\frac{8}{z^4}-\frac{1}{z^5}\right).$$

L'incrément de l'argument de $Q_5(z)$ lorsque la demi-circonférence C_R est parcourue dans le sens positif sera

$$\Delta_{C_R} \arg Q_5(z) = 5\Delta_{C_R} \arg z + \Delta_{C_R} \arg\left(1+\frac{1}{z}+\frac{2}{z^2}-\frac{8}{z^4}-\frac{1}{z^5}\right).$$

Passons dans cette égalité à la limite pour $R \to \infty$:

$$\lim_{R\to\infty} \Delta_{C_R} \arg Q_5(z) = 5\lim_{R\to\infty} \Delta_{C_R} \arg z +$$

$$+ \lim_{R\to\infty} \Delta_{C_R} \arg\left(1+\frac{1}{z}+\frac{2}{z^2}-\frac{8}{z^4}-\frac{1}{z^5}\right).$$

Les deux limites figurant au second membre existent et sont respectivement égales à

$$\lim_{R\to\infty} \Delta_{C_R} \arg z = \pi, \qquad \lim_{R\to\infty} \Delta_{C_R} \arg\left(1+\frac{1}{z}+\frac{2}{z^2}-\frac{8}{z^4}-\frac{1}{z^5}\right) = 0.$$

De cette façon,

$$\lim_{R\to\infty} \Delta_{C_R} \arg Q_5(z) = 5\pi.$$

Supposons maintenant que le point z se déplace suivant l'axe imaginaire de $z = iR$ jusqu'à $z = -iR$. Posons $z = it$, $-R \leqslant t \leqslant R$. Alors

$$Q_5(it) = u(t) + iv(t) = t^4 - 1 + i(t^5 - 2t^3 - 8t),$$

d'où

$$\begin{cases} u = t^4 - 1, \\ v = t^5 - 2t^3 - 8t. \end{cases} \tag{1}$$

C'est l'équation paramétrique de la ligne décrite par le point $w = Q_5(z)$ dans le plan (u, v) pendant que le point z parcourt l'axe imaginaire de haut en bas. Pour construire cette ligne, il faut trouver les points où elle coupe les axes de coordonnées Ou et Ov. En égalant u et v à zéro, on obtient respectivement

$$t^4 - 1 = 0 \quad \text{ou} \quad t = \pm 1, \tag{2}$$

$$t^5 - 2t^3 - 8t = 0 \quad \text{ou} \quad t = \pm 2,\ t = 0. \tag{3}$$

Remarquons que les équations (2) et (3) n'ont pas de racines (réelles) communes, ce qui fait que le polynôme $Q_5(z)$ soit privé de zéros sur l'axe imaginaire. Par

conséquent, on a le droit d'appliquer le principe de l'argument au contour en question. Disposons maintenant les racines des équations (2) et (3) en ordre décroissant, c'est-à-dire suivant le parcours du contour, et trouvons les valeurs correspondantes de u et v:

n°	t	u	v	n°	t	u	v
1	2	15	0	4	−1	0	9
2	1	0	−9	5	−2	15	0
3	0	−1	0				

Ensuite, on a

$$\lim_{t\to\pm\infty} u=+\infty, \qquad \lim_{t\to\pm\infty} v=\pm\infty.$$

Ces données permettent de construire la ligne qui nous intéresse (fig. 12). La figure 12 montre que le vecteur $w = Q_5(z)$ tournera d'un angle $\varphi = 3\pi$ dans le sens négatif. Donc,

$$\Delta_C \arg Q_5(z) = 5\pi - 3\pi = 2\pi,$$

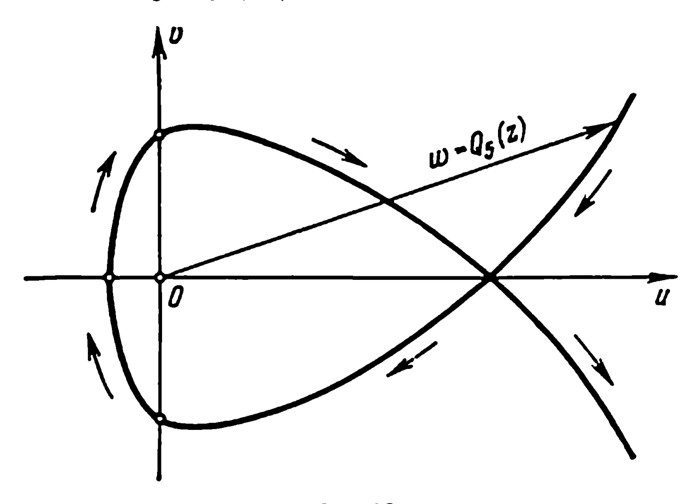


Fig. 12.

d'où l'on trouve le nombre des zéros dans le demi-plan droit:

$$N=\frac{2\pi}{2\pi}=1.$$

EXEMPLE 5. Trouver le nombre des racines de l'équation

$$Q_7(z) \equiv z^7 - 2z - 5 = 0$$

dans le demi-plan droit.

SOLUTION. Choisissons le contour C comme indiqué dans l'exemple 4. Alors

$$\Delta_{C_R} \arg Q_7(z)=\Delta_{C_R} \arg (z^7-2z-5)=$$

$$=\Delta_{C_R} \arg\left[z^7\left(1-\frac{2}{z^6}-\frac{5}{z^7}\right)\right]=7\Delta_{C_R} \arg z+\Delta_{C_R} \arg\left(1-\frac{2}{z^6}-\frac{5}{z^7}\right)=$$

$$=7\pi+\Delta_{C_R} \arg\left(1-\frac{2}{z^6}-\frac{5}{z^7}\right)\to 7\pi \quad \text{pour} \quad R\to\infty.$$

On pose $z = it$ $(-R \leqslant t \leqslant R)$. Alors

$$Q_7(it) = u(t) + iv(t) = -5 + i(-t^7 - 2t),$$

d'où

$$\begin{cases} u=-5, \\ v=-t(t^6+2). \end{cases}$$

Etant donné que $u \neq 0$, on est en droit d'utiliser le principe de l'argument ($Q_7(z)$ ne possède pas de zéros sur l'axe imaginaire). Cette ligne est une droite (fig. 13). Le vecteur $w = Q_7(z)$ tourne dans le sens négatif de π radians. Cela signifie que

$$\Delta_{C_R} \arg Q_7(z) \xrightarrow[R\to\infty]{} 7\pi-\pi=6\pi$$

et

$$N=\frac{6\pi}{2\pi}=3.$$

Donc, notre équation possède trois racines dans le demi-plan droit.

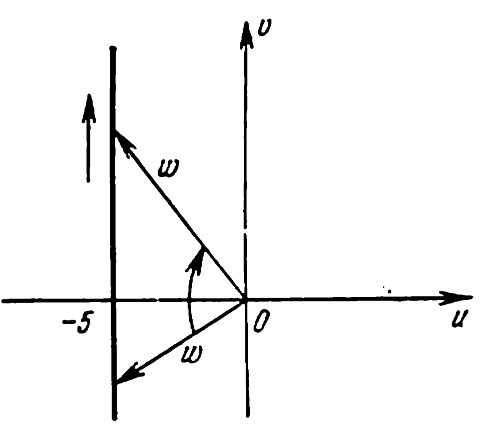


Fig. 13.

Déterminer le nombre des racines admises dans le demi-plan droit par les équations suivantes:

425. $z^4 + 2z^3 + 3z^2 + z + 2 = 0.$ **426.** $z^3 - 2z - 5 = 0.$

427. $z^3 - 4z^2 + 5 = 0.$ **428.** $2z^3 - z^2 - 7z + 5 = 0.$

429. $z^5 + 5z^4 - 5 = 0.$ **430.** $z^{12} - z + 1 = 0.$

THÉORÈME DE ROUCHÉ. *Soient $f(z)$ et $\varphi(z)$ deux fonctions analytiques dans un domaine fermé $\overline{D}$, borné par le contour C, et supposons qu'elles vérifient l'inégalité $|f(z)| > |\varphi(z)|$ en tous les points à l'intérieur du contour susmentionné. Dans ce cas, la somme de ces fonctions $F(z) = f(z) + \varphi(z)$ et la fonction $f(z)$ possèdent le même nombre des zéros (compte tenu de leur multiplicité) dans le domaine D.*

EXEMPLE 6. Trouver le nombre des zéros de la fonction

$$F(z) = z^8 - 4z^5 + z^2 - 1$$

à l'intérieur du disque unité $|z| < 1$.

SOLUTION. Mettons la fonction $F(z)$ sous la forme d'une somme de deux fonctions $f(z)$ et $\varphi(z)$ choisies, par exemple, comme suit:

$$f(z) = -4z^5, \qquad \varphi(z) = z^8 + z^2 - 1.$$

Sur la circonférence $|z| = 1$, on aura alors

$$|f(z)| = |-4z^5| = 4, \quad |\varphi(z)| = |z^8 + z^2 - 1| \leqslant |z^8| + |z^2| + 1 = 3.$$

Donc, l'inégalité $|f(z)| < |\varphi(z)|$ est vérifiée sur la frontière de $|z| = 1$.

La fonction $f(z) = -4z^5$ possède un zéro de multiplicité 5 à l'origine des coordonnées. En vertu du théorème de Rouché, la fonction

$$F(z) = f(z) + \varphi(z) = z^8 - 4z^5 + z^2 - 1$$

possède à l'intérieur du disque $|z| < 1$ cinq zéros. Remarquons que les fonctions $f(z)$ et $\varphi(z)$ peuvent être choisies d'une autre façon, par exemple:

$$f(z) = z^8 - 4z^5, \qquad \varphi(z) = z^2 - 1.$$

EXEMPLE 7. Déterminer le nombre des racines de l'équation

$$z^6 - 6z + 10 = 0$$

à l'intérieur du disque $|z| < 1$.

SOLUTION. Posons, par exemple, $f(z) = 10$ et $\varphi(z) = z^6 - 6z$. Sur la circonférence $|z| = 1$, on a

$$|f(z)| = 10, \qquad |\varphi(z)| = |z^6 - 6z| \leqslant |z^6| + 6|z| = 7.$$

On voit que l'inégalité $|f(z)| > |\varphi(z)|$ est vérifiée en tous les points de la circonférence $|z| = 1$. La fonction $f(z) = 10$ ne possède pas de zéros à l'intérieur du disque $|z| < 1$, ce qui signifie, en vertu du théorème de Rouché, que la fonction $z^6 - 6z + 10$ n'en possède pas non plus.

En utilisant le théorème de Rouché, trouver le nombre des racines des équations suivantes dans les domaines indiqués:

431. $z^4 - 3z^3 - 1 = 0, \qquad |z| < 2.$

432. $z^3 + z + 1 = 0, \qquad |z| < \frac{1}{2}.$

433. $z^5 + z^2 + 1 = 0, \qquad |z| < 2.$

434. $z^8 + 6z + 10 = 0, \qquad |z| < 1.$

435. $27z^{11} - 18z + 10 = 0, \qquad |z| < 1.$

436. $z^8 - 6z^6 - z^3 + 2 = 0, \qquad |z| < 1.$

EXEMPLE 8. Combien de racines admet l'équation

$$z^4 - 5z + 1 = 0 \tag{4}$$

dans la couronne $1 < |z| < 2$?

SOLUTION. Soit N le nombre des racines de l'équation (4) dans la couronne $1 < |z| < 2$. Alors $N = N_2 - N_1$, où N_1 est le nombre des racines de l'équation (4) dans le disque $|z| < 1$, N_2 étant le nombre des racines de cette équation dans le disque $|z| < 2$ ($N_2 \geqslant N_1$). On voit sans difficulté que l'équation (4) ne possède pas de racines sur la circonférence $|z| = 1$: en effet, si $|z| = 1$, alors $|z^4 - 5z + 1| \geqslant 3$.

Pour trouver N_1, posons $f(z) = -5z$, $\varphi(z) = z^4 + 1$. Sur la circonférence $|z| = 1$, on a $|f(z)| > |\varphi(z)|$, car $|f(z)| = |-5z| = 5$, $|\varphi(z)| = |z^4 + 1| \leqslant |z^4| + 1 = 2$. La fonction $f(z) = -5z$ possède un zéro dans le disque $|z| < 1$ et, par conséquent, $N_1 = 1$.

Pour trouver N_2, posons $f(z) = z^4$, $\varphi(z) = 1 - 5z$. Sur la circonférence $|z| = 2$, on a $|f(z)| > |\varphi(z)|$, étant donné que $|f(z)| = |z^4| = 2^4 = 16$, $|\varphi(z)| = |1 - 5z| \leqslant 1 + 5|z| = 11$. La fonction $f(z) = z^4$ possède quatre racines dans le disque $|z| < 2$, donc $N_2 = 4$.

Le nombre des racines que l'équation (4) admet dans la couronne $1 < |z| < 2$ sera $N = 4 - 1 = 3$.

Déterminer le nombre des racines des équations suivantes dans les couronnes indiquées:

437. $4z^4 - 29z^2 + 25 = 0, \quad 2 < |z| < 3.$

438. $z^7 - 5z^4 + z^2 - 2 = 0, \quad 1 < |z| < 2.$

439. $z^6 - 8z + 10 = 0, \quad 1 < |z| < 3.$

EXEMPLE 9. Trouver le nombre des racines de l'équation

$$z^2 - ae^z = 0, \qquad \text{où} \qquad 0 < a < e^{-1},$$

dans le disque unité $|z| < 1$.

SOLUTION. Posons $f(z) = z^2$ et $\varphi(z) = -ae^z$. Sur la circonférence $|z| = 1$, on a

$$|f(z)| = |z^2| = 1,$$

$$|\varphi(z)| = |-ae^z| = a|e^z| = a|e^{x+iy}| = ae^x \leqslant ae < 1$$

en vertu des conditions $-1 \leqslant x \leqslant 1$ et $0 < a < e^{-1}$.

Donc, $|f(z)| > |\varphi(z)|$ si $|z| = 1$. La fonction $f(z) = z^2$ possède une racine de multiplicité 2 à l'origine des coordonnées dans le disque $|z| < 1$. Par conséquent, d'après le théorème de Rouché, l'équation initiale admet deux racines dans le disque indiqué.

REMARQUE. Considérons la fonction d'une variable réelle $F(x) = x^2 - ae^x$. Cette fonction est continue sur le segment $-1 \leqslant x \leqslant 1$. En outre,

$$F(-1) = 1 - ae^{-1} > 0, \quad \text{car} \quad 0 < ae^{-1} < e^{-2} < 1,$$

$$F(0) = -a < 0,$$

$$F(1) = 1 - ae > 0, \qquad \text{car} \qquad a < e^{-1}.$$

De cette façon, aux extrémités des segments $-1 \leqslant x \leqslant 0$ et $0 \leqslant x \leqslant 1$, la fonction $F(x)$ prend des valeurs de signes opposés. Il s'ensuit que dans le disque $|z| < 1$ l'équation donnée possède deux racines réelles qui diffèrent par leurs signes.

Déterminer le nombre des racines des équations suivantes dans les domaines indiqués:

440. $e^{z-\lambda} = z \ (\lambda < 1), \ |z| < 1.$

441. $e^z = az^n$, où n est un nombre naturel et $|a| > \dfrac{e^R}{R^n}$, $|z| < R$.

442. $z^2 - \cos z = 0, \quad |z| < 2.$

443. $z^4 - \sin z = 0, \quad |z| < \pi.$

444. $z^2 + \operatorname{ch} iz = 0, \quad |z| < 0{,}5.$

445. $\operatorname{ch} z = z^2 - 4z, \quad |z| < 1.$ **446.** $2^z = 4z, \quad |z| < 1.$

EXEMPLE 10. Trouver le nombre des racines de l'équation

$$\lambda - z - e^{-z} = 0, \quad \lambda > 1,$$

dans le demi-plan droit $\operatorname{Re} z > 0$.

SOLUTION. Considérons le contour constitué du segment $[-iR, iR]$ et la demi-circonférence droite $|z| = R$. Posons $f(z) = z - \lambda$ et $\varphi(z) = e^{-z}$. Sur le segment $[-iR, iR]$, où $z = iy$, on a

$$|f(z)| = |iy - \lambda| = \sqrt{\lambda^2 + y^2} \geqslant \sqrt{\lambda^2} = \lambda > 1,$$
$$|\varphi(z)| = |e^{-z}| = |e^{-iy}| = 1.$$

et, par conséquent, $|f(z)| > |\varphi(z)|$.

Sur la demi-circonférence $|z| = R$, où $\operatorname{Re} z = x > 0$, on a, pour R suffisamment grand ($R > \lambda + 1$), $|f(z)| > |\varphi(z)|$, car

$$|f(z)| = |z - \lambda| \geqslant |z| - \lambda = R - \lambda > 1,$$
$$|\varphi(z)| = |e^{-z}| = |e^{-x-iy}| = |e^{-x}e^{-iy}| = e^{-x}|e^{-iy}| = e^{-x} \leqslant 1 \quad (x > 0).$$

D'après le théorème de Rouché, à l'intérieur du contour indiqué l'équation donnée possède, pour R aussi grand qu'on le veut, le même nombre des racines que l'équation $f(z) = z - \lambda = 0$, c'est-à-dire une seule racine. Cela signifie que dans le demi-plan droit tout entier notre équation ne possède qu'une seule racine.

447. Montrer que l'équation $ze^{\lambda - z} = 1$, où $\lambda > 1$, ne possède dans le disque unité $|z| \leqslant 1$ qu'une seule racine réelle et positive.

448. Montrer que l'équation $1 + z + \alpha z^n = 0$, où n est un nombre naturel plus grand que l'unité, possède dans le disque $|z| \leqslant \leqslant 2$ au moins une racine quelle que soit la valeur de α.

449. Soient $f(z)$ et $\varphi(z)$ deux fonctions analytiques dans un certain voisinage d'un point a, et soit C un disque de centre au point a et tel que le long de sa circonférence on ait

$$|\alpha f(z)| + |\beta\varphi(z)| < r.$$

Montrer que l'équation $F(z) = z - a - \alpha f(z) - \beta f(z) = 0$ ne possède qu'une et une seule racine à l'intérieur du disque C.

§ 12. Représentations conformes

I. NOTION DE REPRÉSENTATION CONFORME

DÉFINITION. L'application du voisinage d'un point z_0 sur le voisinage d'un point w_0 réalisée par une fonction $w = f(z)$ est appelée représentation (transformation) *conforme* si elle jouit au point z_0 de la propriété de conservation des angles formés entre les lignes et de la permanence des dilatations (fig. 14).

Cela signifie que: 1) si les courbes γ_1 et γ_2 sont respectivement transformées par l'application $w = f(z)$ en les courbes Γ_1 et Γ_2, l'angle φ que font entre elles les tangentes k_1 et k_2 aux courbes γ_1 et γ_2 au point z_0 sera égal à l'angle Φ formé par les tangentes correspondantes K_1 et K_2 aux courbes Γ_1 et Γ_2 au point w_0, c'est-à-dire $\Phi = \varphi$; 2) si l'on considère dans le plan de la variable complexe z un disque infiniment petit de centre au point z_0, dans le plan des w on lui associera un disque infiniment petit centré en w_0. C'est pour cela que l'on dit que la *représentation conforme jouit de la propriété de conservation des angles et de similitude locale*.

Si en réalisant l'application $w = f(z)$ on conserve non seulement la valeur des angles entre les orientations correspondantes mais également le sens de parcours, on a affaire à une *représentation conforme de première espèce*.

Une représentation conforme qui ne conserve que la valeur absolue des angles, alors que le sens de parcours est inversé, est appelée *représentation conforme de deuxième espèce*.

Le plus simple exemple d'une représentation conforme de première espèce

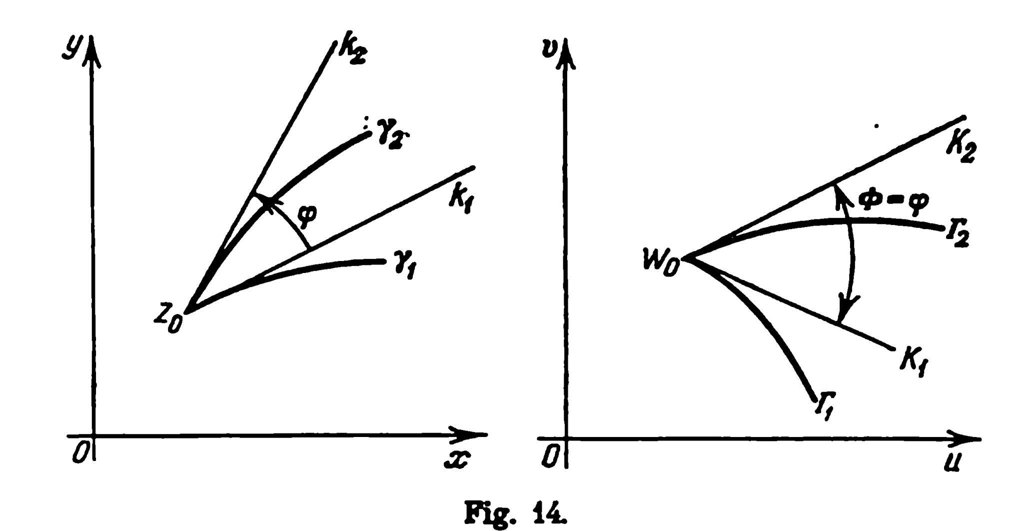


Fig. 14.

est fourni par l'application $w = z$, alors que l'application $w = \bar{z}$ réalise une représentation conforme de deuxième espèce.

Dans la suite, on se limitera à l'examen des représentations conformes de première espèce.

Une application $w = f(z)$ est appelée *représentation conforme dans un domaine D* si elle est conforme en chaque point de ce domaine.

CRITÈRE DE CONFORMITÉ. *Pour qu'une application $w = f(z)$ soit une représentation conforme dans un domaine D, il faut et il suffit que la fonction $w = f(z)$ soit univalente* *) *et analytique dans ce domaine, de plus $f'(z) \neq 0$ pour tous les $z \in D$.*

Si la fonction $f(z)$ n'est pas une fonction univalente, l'application qu'elle réalise ne sera pas biunivoque, donc il n'y aura pas de représentation conforme. Par exemple, la fonction $w = z^4$ donnée dans la demi-couronne $1 \leqslant |z| \leqslant 2$, $0 \leqslant \operatorname{Arg} z \leqslant \pi$ y est analytique et, en outre, partout dans cette demi-couronne la condition $w' = 4z^3 \neq 0$ est vérifiée. Toutefois, la fonction $w = z^4$ applique la demi-couronne donnée sur le domaine $1 \leqslant |w| \leqslant 16$, $0 \leqslant \operatorname{Arg} w \leqslant 4\pi$, c'est-à-dire sur un domaine qui recouvre deux fois la couronne correspondante dans le plan des w, ce qui constitue une violation de la correspondance biunivoque.

EXEMPLE 1. Indiquer les domaines D où les applications

$$\text{a) } w = 2z, \quad \text{b) } w = (z-2)^2$$

sont des représentations conformes.

a) Etant donné que la fonction $f(z) = 2z$ est analytique et univalente dans tout le plan complexe des z et que sa dérivée $f'(z) = 2 \neq 0$, l'application indiquée est conforme dans le plan complexe tout entier.

b) L'application $w = (z-2)^2$ est partout une représentation conforme, sauf au point $z = 2$ où la dérivée $f'(z) = 2(z-2)$ s'annule.

450. Indiquer les domaines où les applications

a) $w = e^{-3z}$; b) $w = z^2 - 4z$; c) $w = -iz^2$;

d) $w = \operatorname{sh}(1-z)$; e) $w = (z+2i)^3$

sont des représentations conformes.

---

*) La fonction $w = f(z)$ est *univalente* dans le domaine D si en divers points de ce domaine elle prend des valeurs différentes.

II. THÉORÈMES GÉNÉRAUX DE LA THÉORIE DES REPRÉSENTATIONS CONFORMES

1. THÉORÈME DE RIEMANN. Il existe une fonction analytique $w = f(z)$ qui réalise biunivoquement la représentation conforme d'un domaine simplement connexe D sur un autre domaine G si seulement aucun de ces domaines ne se confond avec le plan tout entier privé d'un point ou avec tout le plan élargi (fermé).

Il y a une infinité de fonctions analytiques qui appliquent le domaine D sur le domaine G. Pour assurer l'unicité de la fonction $w = f(z)$ qui réalise l'application, il faut que l'une des conditions ci-dessous soit vérifiée:

a) un point donné z_0 du domaine D doit être transformé en un point donné w_0 du domaine G, alors qu'une ligne sortant de z_0 doit tourner d'un angle donné α ($w_0 = f(z_0)$, $\operatorname{Arg} f'(z_0) = \alpha$);

b) un point z_0 du domaine D et un point z_1 de la frontière γ doivent venir respectivement sur un point w_0 du domaine G et sur un point w_1 de la frontière Γ $[w_0 = f(z_0),\ w_1 = f(z_1)]$;

c) trois points frontières z_1, z_2, z_3 du domaine D doivent passer aux trois points frontières w_1, w_2, w_3 du domaine G $[w_1 = f(z_1),\ w_2 = f(z_2),\ w_3 = f(z_3)]$, de plus, si, en parcourant la frontière γ de z_1 à z_3 par z_2, le domaine D reste à gauche (à droite), le domaine G doit également se trouver à gauche (à droite) lorsque l'on parcourt la frontière Γ de w_1 à w_3 en passant par w_2.

Dans les cas b) et c), on suppose que la fonction $f(z)$ est continue dans le domaine fermé D.

2. PRINCIPE DE LA CORRESPONDANCE BIUNIVOQUE DES FRONTIÈRES. Soit D un domaine borné par un contour lisse ou lisse par morceaux γ. Soit $w = f(z)$ une fonction analytique dans D et sur le contour γ qui applique ce dernier sur un certain contour Γ bornant un domaine G; de plus, lorsque le point z parcourt le contour γ de façon que le domaine D reste à gauche, le point correspondant w décrit le contour Γ en laissant également à gauche le domaine G. Dans ces conditions, la fonction $w = f(z)$ réalise une représentation biunivoque et conforme du domaine D sur le domaine G.

3. PRINCIPE DE SYMÉTRIE. Soit D un domaine dont la frontière contient un certain segment rectiligne γ (de longueur finie ou infinie) et supposons que ce domaine est appliqué par la fonction $w = f(z)$ sur un domaine G de

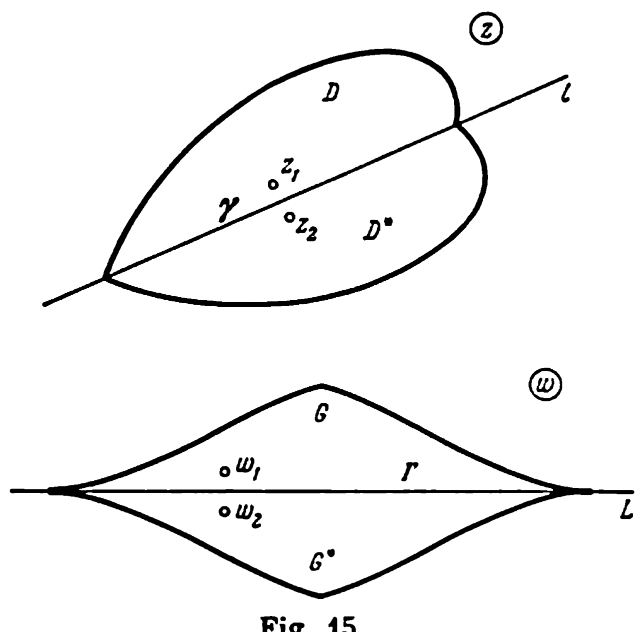


Fig. 15.

façon que γ soit transformé en le segment rectiligne Γ qui fait partie de la frontière du domaine G (fig. 15). Désignons respectivement par l et par L les droites sur lesquelles se trouvent les segments γ et Γ. En vertu du principe de symétrie, on peut affirmer ce qui suit: si la fonction $w = f(z)$ est analytique dans le domaine D de même qu'en tous les points intérieurs du segment frontière γ, cette fonction sera également analytique dans le domaine D^* symétrique du domaine D par rapport à la droite l et jouira en outre de la propriété qui fait que deux points quelconques z_1 et z_2 (l'un d'eux doit se trouver dans D) symétriques par rapport à l soient transformés en les points w_1 et w_2 symétriques par rapport à la droite L.

EXEMPLE 2. Soit donnée l_ fonction

$$w = 3z + i$$

dans le domaine D borné par le contour γ:

$$x^2 + y^2 - 2x = 0.$$

En quel domaine sera transformé le domaine D par l'application réalisée par la fonction indiquée ci-dessus?

SOLUTION. Soient $z = x + iy$, $w = u + iv$. Dans ce cas, la relation $w = 3z + i$ s'écrira $u + iv = 3x + i(3y + 1)$ et $u = 3x$, $v = 3y + 1$. D'où $x = u/3$, $y = (v - 1)/3$.

Le contour γ est transformé en le contour Γ:

$$\left(\frac{u}{3}\right)^2 + \left(\frac{v-1}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{u}{3} = 0 \quad \text{ou} \quad (u-3)^2 + (v-1)^2 = 9,$$

c'est-à-dire en un cercle de rayon 3 centré au point M (3, 1). Le sens de parcours positif du contour γ correspond au sens de parcours positif du contour Γ. Pour s'en convaincre, il suffit de donner les contours par leurs équations paramétriques:

$$\gamma:\ x = 1 + \cos\varphi, \quad y = \sin\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi,$$

$$\Gamma:\ u = 3 + 3\cos\varphi, \quad v = 3\sin\varphi + 1, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi.$$

Conformément au principe de la correspondance biunivoque des frontières, le domaine D sera transformé en le domaine G qui représente l'intérieur du disque borné par le contour Γ.

Pour vérifier cette affirmation, on peut procéder comme suit: on prend un point quelconque $z \in D$ et l'on trouve son image par l'application $w = 3z + i$. Par exemple, le point $z = 1$ devient le point $w = 3 + i$ qui se trouve à l'intérieur du contour Γ.

EXEMPLE 3. On donne les points $z_1 = 2 + 3i$ et $z_2 = 3 + 2i$ symétriques par rapport à la droite $y = x$. Montrer que la fonction $w = e^{-i\frac{\pi}{2}} z$ transforme les points z_1 et z_2 en les points $w_1 = 3 - 2i$ et $w_2 = 2 - 3i$ qui sont symétriques par rapport à la droite $y = -x$.

SOLUTION. Il est aisé de vérifier que la fonction $w = e^{-i\frac{\pi}{2}} z$ transforme la droite $y = x$ en la droite $y = -x$. La fonction $w = e^{-i\frac{\pi}{2}} z$ est partout analytique. En vertu du principe de symétrie, les points $z_1 = 3 + 2i$ et $z_2 = 2 + 3i$, qui sont symétriques par rapport à la droite $y = x$, seront transformés en les points $w_1 = 3 - 2i$ et $w_2 = 2 - 3i$ symétriques par rapport à la droite $y = -x$.

EXEMPLE 4. Montrer que la fonction $w = e^{\frac{\pi z}{h}}$ applique la bande $0 < \operatorname{Im} z < h$ sur le demi-plan supérieur $\operatorname{Im} w > 0$.

SOLUTION. Parcourons la frontière du domaine D de façon que ce dernier reste constamment à gauche. Etant donné que

$$w = u + iv = e^{\frac{\pi(x+iy)}{h}} = e^{\frac{\pi x}{h}} e^{\frac{i\pi y}{h}}.$$

lorsque le point z décrit l'axe réel Ox de $x = -\infty$ à $x = +\infty$ (pour $y = 0$), le point correspondant $w = e^{\frac{\pi x}{h}}$ parcourt le demi-axe réel positif Ou du plan des w depuis le point $u = 0$ jusqu'au point $u = +\infty$, $v = 0$. Quand le point $z = x + ih$ parcourt la frontière supérieure de la bande à partir du point $+\infty + ih$ jusqu'au point $-\infty + ih$ (cela correspond à une variation de x de $+\infty$ à $-\infty$), le point correspondant $w = e^{\frac{\pi x}{h}} e^{i\pi} = -e^{\frac{\pi x}{h}}$ décrit le demi-axe réel négatif Ou du plan des w du point $-\infty$ au point 0. Etant donné que la fonction $w = e^{\frac{\pi x}{h}}$ est analytique dans le domaine D: $0 < \operatorname{Im} z < h$ et sur sa frontière, elle réalise une représentation conforme de ce domaine sur le domaine G: $\operatorname{Im} w > 0$.

451. Montrer que la demi-couronne $1 \leqslant |z| \leqslant 2$, $0 \leqslant \operatorname{Arg} z \leqslant \pi$ est appliquée par la fonction $w = z^2$ sur la couronne $1 \leqslant |w| \leqslant 4$, $0 \leqslant \operatorname{Arg} w \leqslant 2\pi$.

452. Montrer que l'angle $0 < \operatorname{Arg} z < \pi/5$, $0 < |z| < +\infty$ est appliqué par la fonction $w = z^5$ sur le demi-plan supérieur $\operatorname{Im} w > 0$ de façon que le point $z = 0$ soit transformé en le point $w = 0$.

453. Montrer que la bande $1 \leqslant y < 1 + 2\pi$ est appliquée par la fonction $w = e^z$ sur le plan des w tout entier doté d'une coupure le long du demi-axe Ou positif.

III. REPRÉSENTATIONS CONFORMES RÉALISÉES PAR LA FONCTION LINÉAIRE $w = az + b$, PAR LA FONCTION $w = \frac{1}{z}$ ET PAR LA FONCTION HOMOGRAPHIQUE $w = \frac{az+b}{cz+d}$

1. FONCTION LINÉAIRE. La fonction linéaire $w = az + b$, où a et b sont des nombres complexes constants ($a \neq 0$), réalise la représentation conforme de tout le plan des z sur tout le plan des w, car, pour n'importe quelle valeur de z, on a $w' = a \neq 0$.

Signalons quelques cas particuliers:

1) $$w = z + b \tag{1}$$

réalise une translation;

2) $$w = e^{i\alpha} z, \tag{2}$$

où α est un nombre réel, réalise une rotation de l'angle α autour de l'origine des coordonnées;

3) $$w = rz, \tag{3}$$

où r est un nombre réel positif, réalise une homothétie de centre de similitude à l'origine des coordonnées et de rapport de similitude r.

Dans le cas général, l'application linéaire

$$w = az + b, \quad \text{où} \quad a = re^{i\alpha} \tag{4}$$

est réalisée en effectuant successivement: 1) une rotation de l'angle α autour de l'origine des coordonnées; 2) une homothétie de centre à l'origine des coordonnées et de rapport r; 3) une translation à l'aide du vecteur correspondant au nombre complexe b.

Remarquons que la transformation linéaire laisse à leurs places deux points: $z_1 = \infty$ et $z_2 = \frac{b}{1-a}$. Pour $a = 1$, on obtient $z_2 = \infty$, ce qui signifie que, dans ce cas, les deux points fixes se confondent.

EXEMPLE 5. Montrer que l'application linéaire $w = az + b$ est parfaitement définie si deux points différents z_1 et z_2 sont respectivement transformés en deux points arbitrairement donnés mais distincts w_1 et w_2.

SOLUTION. En effet, l'application $w = az + b$ sera définie si l'on connaît les valeurs des paramètres a et b. Montrons que nos conditions donnent la possibilité de trouver ces paramètres d'une façon univoque. Supposons que, pour $z = z_1$, on obtient $w = w_1$, c'est-à-dire $w_1 = az_1 + b$, et que, pour $z = z_2$, on a $w_2 = az_2 + b$.

D'ici on tire

$$a = \frac{w_2 - w_1}{z_2 - z_1}, \quad b = \frac{w_1 z_2 - w_2 z_1}{z_2 - z_1} \quad (z_1 \neq z_2).$$

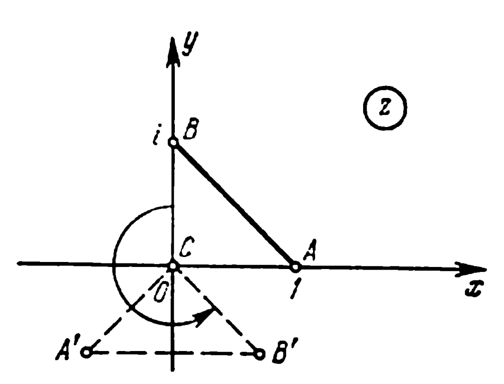
Les relations ainsi obtenues définissent univoquement les paramètres a et b.

EXEMPLE 6. Montrer que l'application linéaire (4) peut être donnée en imposant les conditions suivantes: le point z_1 est transformé en le point w_1; la valeur de la dérivée $\frac{dw}{dz}$ au point z_1 est égale à a.

SOLUTION. Pour définir l'application (4), il faut donner les valeurs des paramètres a et b. En partant de la condition que le point z_1 passe au point w_1, on obtient $w_1 = az_1 + b$. En retranchant cette égalité de l'application (4), on trouve $w - w_1 = a(z - z_1)$. Il est évident que $\frac{dw}{dz} = a$ pour toute valeur de z. Pour cette raison, en imposant la valeur de la dérivée $\frac{dw}{dz}$ au point z_1, on arrive à définir le paramètre a. De cette façon, l'application linéaire $w - w_1 = a(z - z_1)$ est complètement définie (le paramètre $b = w_1 - az_1$).

EXEMPLE 7. Trouver la fonction linéaire qui applique le triangle de sommets 0, 1, i situé dans le plan des z sur un triangle semblable de sommets $1 + i$, 0, 2 disposé dans le plan des w.

SOLUTION. *Première méthode.* La figure 16 montre que le triangle ABC est transformé en un triangle semblable $A_1B_1C_1$ à la suite des opérations ci-dessous:



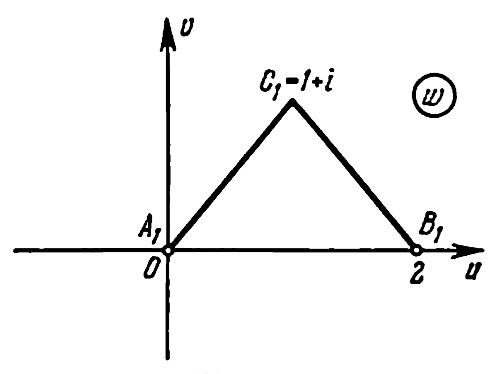


Fig. 16.

1) rotation autour de l'origine des coordonnées d'un angle $\frac{5}{4}\pi$, ce qui correspond à la transformation

$$w_1 = e^{i\frac{5}{4}\pi} z;$$

2) homothétie de centre à l'origine des coordonnées et de rapport $r = \sqrt{2}$ (car $\frac{A_1B_1}{AB} = \sqrt{2}$):

$$w_2 = \sqrt{2} w_1;$$

3) translation qui fait passer le point C (0, 0) au point C_1 (1, 1) (on obtient $b = 1 + i$):

$$w = w_2 + 1 + i.$$

Compte tenu du fait que $e^{i\frac{5}{4}\pi} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$, on obtient finalement

$$w = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) z + 1 + i = (1 - z)(1 + i).$$

Deuxième méthode. Supposons que la fonction cherchée se présente sous la forme $w = az + b$, où a et b sont des constantes qui ne sont pas encore connues. D'après les conditions du problème, les points $z_1 = 0$ et $z_2 = 1$ doivent être respectivement transformés en les points $w_1 = 1 + i$ et $w_2 = 0$. On obtient le système d'équations

$$\begin{cases} 1 + i = b, \\ 0 = a + b, \end{cases}$$

qui permet de trouver a et b: $a = -1 - i$, $b = 1 + i$, donc,

$$w = (1 + i)(1 - z).$$

454. Indiquer le sens géométrique (translation, dilatation, rotation) des transformations suivantes:

a) $w = z + 3i$; b) $w = z + 5$; c) $w = iz$; d) $w = e^{i\frac{\pi}{6}} z$;

e) $w = 3z$; f) $w = \frac{1-i}{\sqrt{2}} z$.

455. Trouver la forme générale des fonctions linéaires qui réalisent les transformations suivantes:

a) transformation du demi-plan supérieur en lui-même;

b) transformation du demi-plan supérieur en le demi-plan inférieur;

c) transformation du demi-plan supérieur en le demi-plan droit.

456. Trouver les applications linéaires $w = az + b$ qui ne font pas changer de place au point z_0 et qui transforment le point z_1

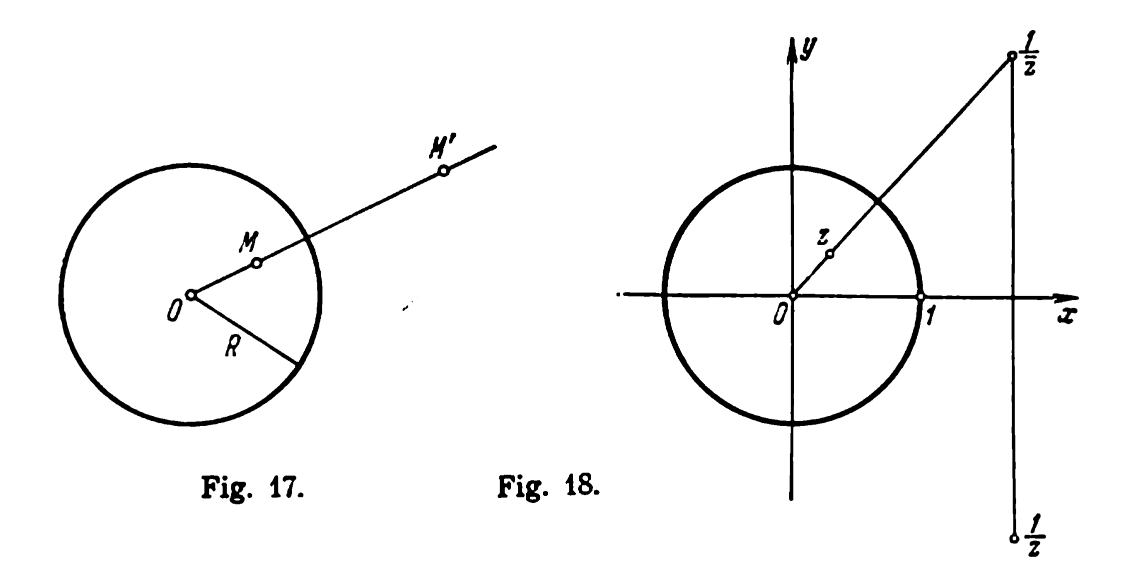


Fig. 17. Fig. 18.

en le point w_1:

a) $z_0 = 1 - i, \quad z_1 = 2 + i, \quad w_1 = 4 - 3i$;

b) $z_0 = -i, \quad z_1 = 1 - 2i, \quad w_1 = 2 - 3i$;

c) $z_0 = -1 - i, \quad z_1 = 3 - 2i, \quad w_1 = 3i$.

457. Trouver une fonction linéaire $w = f(z)$ qui applique la bande comprise entre les droites $x = a$, $x = a + h$ sur la bande $0 < u < 1$ située dans le plan des w.

2. FONCTION

$$w = \frac{1}{z}. \tag{5}$$

Les points M et M' sont symétriques par rapport à une circonférence Γ si:

1) ils se trouvent sur la même demi-droite partant du centre de la circonférence;

2) le produit de leurs distances au centre de la circonférence est égal au carré du rayon de la circonférence: $OM \cdot OM' = R^2$ (fig. 17).

REMARQUE. Les points de la circonférence Γ sont symétriques à eux-mêmes par rapport à la circonférence à laquelle ils appartiennent.

Pour le centre 0 de la circonférence Γ, le point symétrique par rapport à cette circonférence se trouve à l'infini.

Si le centre de la circonférence Γ se situe à l'origine des coordonnées et que l'un des points symétriques par rapport à cette circonférence représente le nombre comlexe z, l'autre point correspond au nombre complexe $\frac{R^2}{\bar{z}}$.

La transformation $w = \frac{1}{z}$ inclut deux réflexions symétriques: par rapport à la circonférence unité et par rapport à l'axe réel (fig. 18). Cette transformation est appelée *inversion*.

La transformation $w = \frac{1}{z}$ est conforme dans tout le plan complexe élargi (fermé), de plus elle met en correspondance aux points $z = 0$ et $z = \infty$ respectivement les points $w = \infty$ et $w = 0$. (On considère que l'angle que forment

entre elles les lignes au point à l'infini de l'un des plans (des z ou des w) est égal à l'angle formé par les images de ces lignes à l'origine des coordonnées de l'autre plan.) La transformation $w = \frac{1}{z}$ fait transformer les circonférences (de même que les droites) en circonférences ou en droites. Les points fixes sont: $z_1 = +1$ et $z_2 = -1$.

EXEMPLE 8. Trouver l'image de la circonférence $|z| = 3$ par l'application $w = \frac{25}{z}$.

SOLUTION. *Première méthode*. Soient $z = x + iy$, $w = u + iv$. Alors le rapport $w = \frac{25}{z}$ peut s'écrire

$$u + iv = \frac{25}{x+iy} = \frac{25x}{x^2+y^2} - i\,\frac{25y}{x^2+y^2},$$

d'où

$$u = \frac{25x}{x^2+y^2}, \qquad v = -\frac{25y}{x^2+y^2}. \tag{a}$$

L'équation de la circonférence $|z| = 3$ en coordonnées cartésiennes sera

$$x^2 + y^2 = 9. \tag{b}$$

En éliminant x et y entre les équations (a) et (b), on obtient

$$u^2 + v^2 = \left(\frac{25}{3}\right)^2,$$

c'est-à-dire une circonférence de rayon $R = \frac{25}{3}$ centrée sur l'origine des coordonnées dans le plan des w.

Deuxième méthode. Mettons z et w sous forme exponentielle:

$$z = \rho e^{i\varphi}, \qquad w = re^{i\theta}.$$

Alors, par l'application $w = \frac{25}{z}$, on obtient

$$re^{i\theta} = \frac{25}{\rho e^{i\varphi}},$$

d'où $r = \frac{25}{\rho}$, $\theta = -\varphi$, où $\rho = 3$ et $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Donc,

$$w = \frac{25}{3} e^{-i\varphi}.$$

C'est une circonférence de rayon $r = 25/3$ centrée sur l'origine des coordonnées qui est parcourue dans le sens horaire lorsque la circonférence primitive est parcourue dans le sens antihoraire.

Troisième méthode. De l'égalité $w = 25/z$ on tire $z = 25/w$. En portant cette expression de z dans l'équation de la circonférence $|z| = 3$ et en utilisant la propriété du module, on obtient

$$\left|\frac{25}{w}\right| = 3 \qquad \text{ou} \qquad \frac{25}{|w|} = 3,$$

d'où $|w| = 25/3$. Il s'ensuit que l'image de la circonférence $|z| = 3$ obtenue par l'application $w = 25/z$ est la circonférence $|w| = 25/3$.

458. Indiquer le domaine sur lequel la fonction $w = 1/z$ applique la demi-bande

$$0 < \mathrm{Re}\, z < 1, \qquad \mathrm{Im}\, z > 0.$$

459. Trouver les images des ensembles suivants par l'application $w = 1/z$:

a) $\mathrm{Arg}\, z = \pi/3$; b) $|z| = 1$, $\frac{\pi}{4} < \mathrm{Arg}\, z < \pi$;

c) $2 \leqslant x \leqslant 4$, $y = 0$; d) $-2 < y < -1$, $x = 0$;

e) $0 < \mathrm{Re}\, z < 1$.

3. LA FONCTION HOMOGRAPHIQUE

$$w = \frac{az+b}{cz+d}, \tag{6}$$

où a, b, c, d sont des constantes complexes vérifiant la condition $ad - bc \neq 0$, réalise une représentation conforme et biunivoque du plan élargi des z sur le plan élargi des w. La transformation ainsi réalisée est dite *homographique*. Chaque transformation homographique peut être obtenue en utilisant successivement des transformations linéaires et une transformation du type $w = \frac{1}{z}$.

EXEMPLE 9. Trouver les conditions nécessaires à ce que la fonction homographique (6)

$$w = \frac{az+b}{cz+d}$$

applique le demi-plan supérieur $\mathrm{Im}\, z > 0$ sur le demi-plan supérieur $\mathrm{Im}\, w > 0$.

SOLUTION. Pour que l'application susmentionnée ait lieu, il faut que la frontière du domaine $\mathrm{Im}\, z > 0$ (c'est l'axe Ox parcouru de gauche à droite) soit transformée en la frontière du domaine $\mathrm{Im}\, w > 0$ (c'est l'axe Ou parcouru également de gauche à droite). De cette façon, les valeurs de w devront être réelles pour n'importe quelles valeurs réelles de z. Cela n'est possible que si a, b, c, d ont des valeurs réelles. D'autre part, à chaque valeur de $z = x + iy$, où $y > 0$, il faut mettre en correspondance une valeur de $w = u + iv$ telle que $v > 0$. En portant $z = x + iy$ dans la formule (6), on obtient

$$w = u + iv = \frac{(ax+b)(cx+d) + acy^2}{(cx+d)^2 + y^2} + i\,\frac{(ad-bc)\,y}{(cx+d)^2 + y^2},$$

d'où

$$v = \frac{(ad-bc)\,y}{(cx+d)^2 + y^2}.$$

Etant donné qu'ici $y > 0$ et que le dénominateur est positif, pour que v soit positif il faut et il suffit que la condition $ad - bc > 0$ soit vérifiée. C'est justement la condition cherchée.

PROPRIÉTÉS DE LA TRANSFORMATION HOMOGRAPHIQUE

1. PROPRIÉTÉ CIRCULAIRE. La transformation homographique transforme toute circonférence en une circonférence (la droite est considérée comme étant une circonférence de rayon infini).

2 PROPRIÉTÉ DE CONSERVATION DES POINTS SYMÉTRIQUES. Deux points z_1 et z_2 symétriques par rapport à une circonférence C sont transformés en les points w_1 et w_2 symétriques par rapport à la circonférence Γ sur laquelle est appliquée la circonférence C.

COROLLAIRE. *Si par une application homographique $w = f(z)$ une droite ou une circonférence γ est transformée en une circonférence Γ et si l'un des deux points symétriques par rapport à γ est transformé en le centre de la circonférence Γ, alors l'autre point sera obligatoirement transformé en le point à l'infini.*

3. Il n'y a qu'une seule fonction homographique qui transforme trois points donnés z_1, z_2, z_3 du plan des z en trois points donnés w_1, w_2, w_3 du plan des w. Cette fonction est de la forme

$$\frac{w-w_1}{w-w_2}\cdot\frac{w_3-w_2}{w_3-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_2}\cdot\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}. \tag{7}$$

EXEMPLE 10. Trouver la fonction homographique qui transforme les points $z_1 = 1$, $z_2 = i$, $z_3 = -1$ en les points $w_1 = -1$, $w_2 = 0$, $w_3 = 1$.

SOLUTION. En appliquant la formule (7), on a

$$\frac{w+1}{w-0}\cdot\frac{1-0}{1-(-1)}=\frac{z-1}{z-i}\cdot\frac{-1-i}{-1-1},$$

d'où

$$w=i\,\frac{i-z}{i+z}.$$

REMARQUE. Si l'un des points z_k ou w_k ($k = 1, 2, 3$) est le point à l'infini, il faut substituer dans la formule (7) l'unité à toutes les différences qui contiennent ce point.

EXEMPLE 11. Trouver la fonction homographique qui transforme le point z_1 en le point $w_1 = 0$, et le point z_2 en le point $w_2 = \infty$.

SOLUTION. Considérons un point arbitraire z_3 distinct des points z_1 et z_2 et supposons qu'il soit transformé en le point w_3 autre que les points w_1 et w_2. Dans ce cas, d'après la formule (7) et compte tenu de la remarque ci-dessus on a

$$\frac{w-0}{1}\cdot\frac{1}{w_3-0}=\frac{z-z_1}{z-z_2}\cdot\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1},$$

d'où

$$w=K\,\frac{z-z_1}{z-z_2},$$

où

$$K=\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}\,w_3, \tag{8}$$

ce qui signifie que K est un nombre complexe arbitraire, $K \neq 0$.

EXEMPLE 12. Appliquer le demi-plan supérieur $\operatorname{Im} z > 0$ sur le disque unité $|w| < 1$ de façon qu'un point z_0 ($\operatorname{Im} z_0 > 0$) soit transformé en le centre $w = 0$ du disque.

SOLUTION. Etant donné que le point z_0 est transformé par la fonction homographique cherchée $w = w(z)$ en le centre du disque, c'est-à-dire $w(z_0) = 0$, son point conjugué $\bar{z}_0$ doit être transformé en le point $w = \infty$ (en vertu de la propriété de conservation des points symétriques). D'après la formule (8), on obtient

$$w=K\,\frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0},$$

où K est un facteur constant. Pour tout K, cette fonction applique le demi-plan supérieur sur un certain disque de centre au point $w = 0$. Choisissons K de façon que le disque soit le disque unité. Pour ce faire, il suffit que le point $z = 0$ (c'est un point frontière du domaine $\text{Im}\, z > 0$) soit transformé en un point du cercle unité $|w| = 1$. Alors

$$1 = |w| = |K| \cdot \left| \frac{z_0}{\bar{z}_0} \right|, \quad \text{d'où} \quad |K| = 1, \quad \text{et} \quad K = e^{i\alpha},$$

où α est un nombre réel quelconque. Donc,

$$w = e^{i\alpha} \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}. \tag{9}$$

REMARQUE. Trouvons la dérivée w' au point $z_0 = a + ib$ $(b > 0)$:

$$w'(z_0) = -\frac{ie^{i\alpha}}{2b} \quad \text{ou} \quad w'(z_0) = \frac{1}{2b} e^{i\alpha} \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}} = \frac{e^{i\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}}{2b}.$$

De cette façon, $\text{Arg}\, w'(z_0) = \alpha - \pi/2$, et, suivant le sens géométrique de la dérivée, l'application (9) entraîne la rotation des courbes au point z_0 d'un angle égal à $\alpha - \pi/2$.

D'après le théorème de Riemann, il n'y a qu'une seule application $w = w(z)$ du demi-plan $\text{Im}\, z > 0$ sur le disque $|w| < 1$ qui puisse satisfaire aux conditions $w(z_0) = 0$, $\text{Arg}\, w'(z_0) = \alpha - \pi/2$. Il s'ensuit que toute application homographique du demi-plan $\text{Im}\, z > 0$ sur le disque $|w| < 1$ est de la forme (9).

EXEMPLE 13. Appliquer le disque unité $|z| < 1$ sur le disque unité $|w| < 1$.

SOLUTION. Supposons que l'application homographique cherchée $w = w(z)$ transforme un point z_0 situé à l'intérieur du disque $|z| < 1$ en le centre du disque $|w| < 1$ de façon que $w(z_0) = 0$. Dans ce cas, le point $z_0^* = 1/\bar{z}_0$ symétrique par rapport au cercle unité $|z| = 1$ sera transformé en le point à l'infini, c'est-à-dire $w(z_0^*) = \infty$. Alors, on obtient d'après la formule (8),

$$w = K \frac{z - z_0}{z - \frac{1}{\bar{z}_0}} \quad \text{ou} \quad w = K_1 \frac{z - z_0}{1 - z\bar{z}_0},$$

où $K_1 = -K\bar{z}_0$ est un certain nombre complexe constant.

Choisissons la constante K_1 de façon que le disque disposé dans le plan des w soit le disque unité. Pour cela, il suffit que le point $z = 1$ soit transformé en un point situé sur le cercle unité $|w| = 1$. Il vient alors

$$1 = |w| = |K_1| \cdot \left| \frac{1 - z_0}{1 - \bar{z}_0} \right|,$$

d'où $|K_1| = 1$, car $|1 - z_0| = |1 - \bar{z}_0|$. Par conséquent, $K_1 = e^{i\alpha}$, où α est un nombre réel quelconque.

Donc,

$$w = e^{i\alpha} \frac{z - z_0}{1 - z\bar{z}_0}, \tag{10}$$

où $|z_0| < 1$, α étant un nombre réel quelconque.

REMARQUE. Etant donné que

$$w'(z) = \frac{e^{i\alpha}}{1 - z\bar{z}_0}, \qquad \text{alors} \qquad w'(z_0) = \frac{e^{i\alpha}}{1 - |z_0|^2},$$

c'est-à-dire $\operatorname{Arg} w'(z_0) = \alpha$. Cela signifie que l'application (10) entraîne la rotation des courbes au point z_0 d'un angle égal à α.

D'après le théorème de Riemann, il n'y a qu'une seule application $w = w(z)$ du disque unité $|z| < 1$ sur le disque unité $|w| < 1$ qui vérifie les conditions $w(z_0) = 0$, $\operatorname{Arg} w'(z_0) = \alpha$.

Il s'ensuit que toute application homographique du disque unité $|z| < 1$ sur le disque unité $|w| < 1$ est de la forme (10).

EXEMPLE 14. Trouver la fonction $w = f(z)$ qui réalise la représentation conforme du disque unité sur lui-même et telle que

$$f\left(\frac{i-1}{2}\right) = 0, \qquad \operatorname{Arg} f'\left(\frac{i-1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

SOLUTION. D'après la formule

$$w = e^{i\alpha} \frac{z - z_0}{1 - z\bar{z}_0}$$

(α est un nombre réel quelconque), on obtient l'application du disque unité $|z| < 1$ sur le disque unité $|w| < 1$ de façon que le point $z_0 = \frac{i-1}{2}$ soit transformé en le centre $w = 0$. On a

$$w = f(z) = e^{i\alpha} \frac{z - \frac{i-1}{2}}{1 + z \cdot \frac{1+i}{2}} \qquad \text{ou} \qquad f(z) = e^{i\alpha} \frac{2z + 1 - i}{2 + z(1+i)}.$$

Etant donné que

$$f'(z) = e^{i\alpha} \frac{2}{[2 + (1+i)z]^2}, \qquad \text{il vient} \qquad f'(z_0) = f'\left(\frac{i-1}{2}\right) = 2e^{i\alpha}.$$

En vertu de la condition $\operatorname{Arg} f'\left(\frac{i-1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$, on obtient $\operatorname{Arg}(2e^{i\alpha}) = \pi/2$, d'où $\alpha = \pi/2$, et, par conséquent,

$$f(z) = i\,\frac{2z + 1 - i}{2 + (1+i)z} \qquad \text{ou} \qquad f(z) = \frac{1 + (2z+1)i}{2 + z(1+i)}.$$

460. Déterminer la transformation homographique qui transforme l'axe réel en le cercle unité.

Trouver les images des domaines suivants par les applications homographiques indiquées:

461. Couronne $1 < |z| < 2$ par $w = \frac{z+1}{z+2}$.

462. Extérieur du disque $|z| > 1$ par $w = \frac{z+i}{z-i}$.

463. Disque $|z| < 1$ par $w = \frac{z-1}{z+i}$.

464. Déterminer l'image de l'intérieur du disque $|z| < 1$ par l'application homographique qui transforme les points $z_1 = 1$, $z_2 = i$, $z_3 = \infty$ respectivement en les points $w_1 = 0$, $w_2 = \infty$, $w_3 = 1$.

465. Trouver les points symétriques du point $z = 1 + i$ par rapport aux lignes suivantes:

a) $x = 0$; b) $|z| = \sqrt{2}$; c) $|z - 1 - i| = 2$.

466. Trouver la forme générale de la fonction homographique qui applique:

a) le demi-plan supérieur sur le demi-plan inférieur;

b) le demi-plan supérieur sur le demi-plan droit.

467. Trouver l'application du demi-plan supérieur sur lui-même si:

$$w(0) = 1, \qquad w(1) = 2, \qquad w(2) = \infty.$$

468. Trouver l'application du demi-plan supérieur $\operatorname{Im} z > 0$ sur le disque unité $|w| < 1$ réalisée de façon que:

a) $w(i) = 0$, $\operatorname{Arg} w'(i) = -\pi/2$;

b) $w(2i) = 0$, $\operatorname{Arg} w'(2i) = 0$.

469. Trouver la fonction $w = f(z)$ qui applique le demi-plan supérieur sur le disque unité de façon que les points $z_1 = -1$, $z_2 = 0$, $z_3 = 1$ soient transformés respectivement en les points $w_1 = 1$, $w_2 = i$, $w_3 = -1$ de la circonférence de ce dernier.

470. Trouver la fonction $w = f(z)$ qui applique le disque $|z| < 1$ sur le demi-plan inférieur de façon que les points 1, i, $-i$ soient transformés respectivement en les points 1, 0, -1.

471. Trouver la fonction homographique qui applique le disque $|z| < 1$ sur le demi-plan $\operatorname{Im} z > 0$ de façon que les points -1, 1, i soient transformés respectivement en les points ∞, 0, 1.

472. Trouver la représentation conforme du disque $|z| < 5$ sur le disque $|w| < 1$ réalisée de façon que les points -5, $4 + 3i$, 5 soient transformés respectivement en les points -1, i, 1.

473. Trouver la fonction $w = f(z)$ qui réalise la représentation conforme du disque unité sur lui-même de façon que:

a) $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, $\operatorname{Arg} f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$;

b) $f(0) = 0$, $\operatorname{Arg} f'(0) = -\frac{\pi}{2}$.

474. Trouver la fonction homographique qui applique le disque $|z - 2| < 3$ sur le disque $|w| < 1$ de façon que les points -1, 5, $i\sqrt{5}$ soient transformés respectivement en les points 1, i, -1.

475. Trouver le domaine du plan des w sur lequel la fonction $w = i\,\frac{1-z}{1+z}$ applique le demi-disque supérieur $|z| < 1$, $\operatorname{Im} z > 0$.

476. Trouver l'image du domaine D: $1 \leqslant |z| \leqslant 2$, $0 \leqslant \operatorname{Arg} z \leqslant \pi/4$ par l'application $w = \frac{1}{z} + 1$.

IV. REPRÉSENTATIONS CONFORMES RÉALISÉES PAR LES PRINCIPALES FONCTIONS ÉLÉMENTAIRES

1. FONCTION PUISSANCE

$$w = z^n \tag{11}$$

où $n \geqslant 2$ est un nombre entier positif.

L'application réalisée par la fonction puissance est conforme dans tout le plan, sauf au point $z = 0$: pour $z \neq 0$, on a $w' = nz^{n-1}$; pour $z = 0$, $w' = 0$. Lorsque $z = 0$, la conformité est enfreinte, car, en effectuant l'application à l'aide de la fonction (11), on obtient des angles n fois plus grands. L'angle $0 < \varphi < 2\pi/n$ est appliqué par la fonction (11) d'une façon biunivoque sur tout le plan des z muni d'une coupure le long de la partie positive de l'axe réel, de plus, les bords supérieur et inférieur de cette coupure correspondent respectivement aux demi-droites $\varphi = 0$ et $\varphi = \frac{2\pi}{n}$. La même application sera obtenue pour chacun des angles déterminés dans le plan des z par les demi-droites $\varphi = \frac{2\pi k}{n}$ (k est un nombre entier), de plus, lors de l'application de l'angle $\frac{2(k-1)\pi}{n} < \varphi < \frac{2k\pi}{n}$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) sur le plan muni d'une coupure les bords supérieur et inférieur de celle-ci correspondent respectivement aux demi-droites $\varphi = \frac{2(k-1)\pi}{n}$ et $\varphi = \frac{2k\pi}{n}$.

EXEMPLE 15. Appliquer le secteur $0 < \operatorname{Arg} z < \frac{\pi}{4}$ sur le disque unité $|w| < 1$ de façon que les points $z_1 = e^{i\frac{\pi}{8}}$ et $z_2 = 0$ soient respectivement transformés en le centre $w_1 = 0$ et en le point $w_2 = 1$.

SOLUTION. Appliquons à l'aide de la fonction $t = z^4$ le secteur $0 < \operatorname{Arg} z < \pi/4$ (fig. 19, *a*) sur le demi-plan supérieur $\operatorname{Im} t > 0$ (fig. 19, *b*). Le point $z_1 = e^{i\frac{\pi}{8}}$ sera transformé en le point $t_1 = z_1^4 = i$, alors que le point $z_2 = 0$ deviendra le point $t_2 = 0$.

Ensuite, appliquons le demi-plan $\operatorname{Im} t > 0$ sur le disque $|w| < 1$ de façon que le point $t_1 = i$ soit transformé en le centre de ce disque (fig. 19, *c*). En utilisant la formule (9), on obtient

$$w = e^{i\varphi}\frac{t-i}{t+i}.$$

L'exigence, en vertu de laquelle le point $t_2 = 0$ doit être transformé en le point $w_2 = 1$, donne $e^{i\varphi} = -1$. En portant les valeurs $e^{i\varphi} = -1$ et $t = z^4$ dans l'expression de w, on obtient finalement

$$w = -\frac{z^4 - i}{z^4 + i}.$$

EXEMPLE 16. Trouver la fonction qui applique le demi-disque supérieur $|z| < 1$, $\operatorname{Im} z > 0$ sur le demi-plan supérieur $\operatorname{Im} w > 0$.

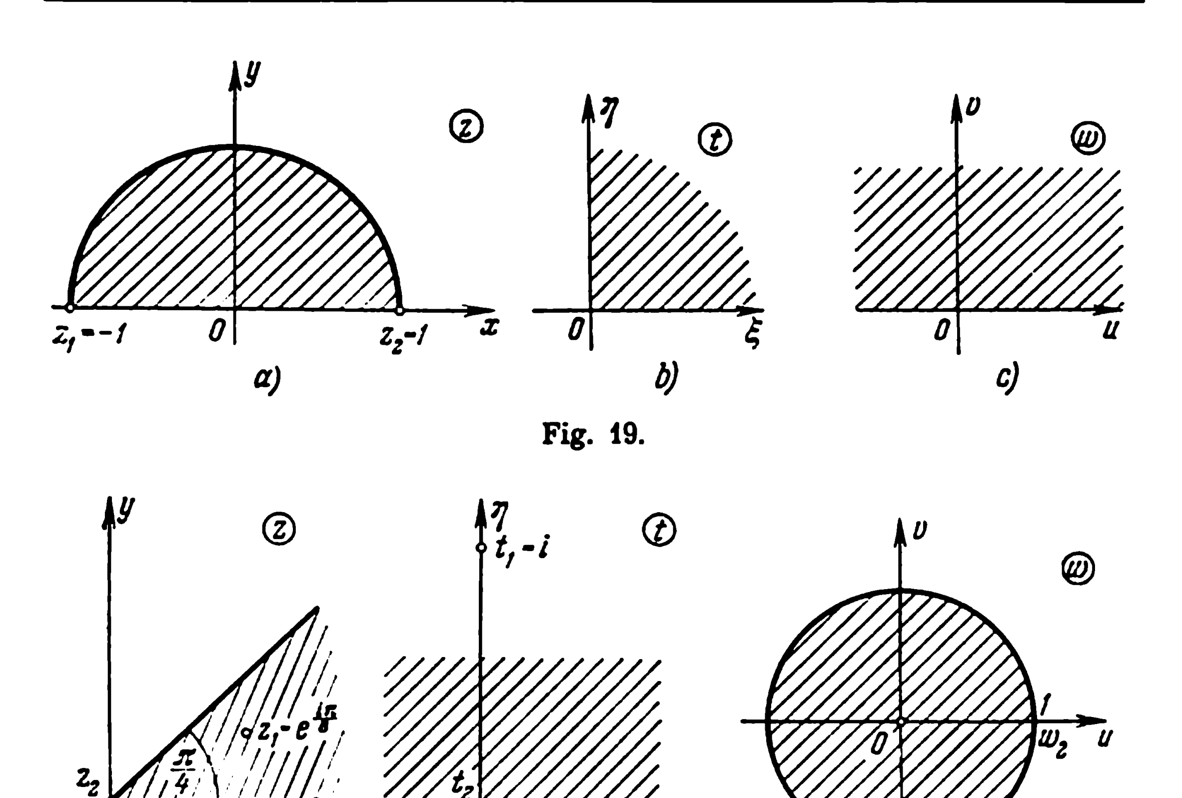


Fig. 19.

Fig. 20.

SOLUTION. Le domaine donné représente un 2-angle de sommets aux points $z_1 = -1$ et $z_2 = 1$ et d'angle au sommet $\alpha = \pi/2$ (fig. 20, *a*).

La fonction auxiliaire $t = \frac{1+z}{1-z}$ réalise la représentation conforme de ce 2-angle sur le Ier quadrant du plan des t (fig. 20, *b*). La fonction $w = t^2$ ou $w = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2$ assure l'obtention de l'application cherchée (fig. 20, *c*).

2. LA RACINE. La fonction $w = \sqrt[n]{z}$, qui est la réciproque de la fonction puissance $z = w^n$, est n-forme, c'est-à-dire qu'à chaque valeur de $z = \rho e^{i\varphi}$ ($z \neq 0$ et $z \neq \infty$) il correspond n valeurs de w données par la formule

$$w_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right), \quad k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1.$$

Chacune des fonctions w_k représente une branche de la fonction multiforme $w = \sqrt[n]{z}$. Le point $z = 0$ est le point de branchement (de ramification) de cette fonction.

Dans le plan élargi des z muni de n'importe quelle coupure allant de $z = 0$ à $z = \infty$ (en particulier, la coupure peut être pratiquée suivant la partie positive de l'axe réel), on peut séparer n branches uniformes de w_k. Ces branches appliquent d'une façon univalente le plan élargi muni d'une coupure le long de la partie positive de l'axe réel sur les secteurs

$$\frac{2(k-1)\pi}{n} < \operatorname{Arg} w < \frac{2k\pi}{n} \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

EXEMPLE 17. Appliquer le demi-plan supérieur $\operatorname{Im} z > 0$ muni d'une coupure suivant le segment compris entre les points $z_1 = 0$ et $z_2 = ai$ $(a > 0)$ sur le demi-plan supérieur $\operatorname{Im} w > 0$ (éliminer la coupure).

SOLUTION. 1) Doublons les angles à l'origine des coordonnées à l'aide de l'application $t = z^2$. Dans ce cas, le segment z_1z_2 sera transformé en le segment t_1t_2 du plan élargi des t allant du point $t_1 = 0$ au point $t_2 = -a^2$, alors que la demi-droite $\operatorname{Arg} z = \pi$ (demi-axe réel négatif) deviendra la demi-droite $\operatorname{Arg} w = 2\pi$. De cette façon, le domaine de départ est appliqué sur le plan élargi des t doté d'une coupure allant du point $t_2 = -a^2$ au point $t = +\infty$.

2) Amenons l'origine de la coupure à l'origine des coordonnées à l'aide de la fonction linéaire $\tau = t + a^2$. De cette façon, le plan élargi des τ présente une coupure depuis le point $\tau = 0$ jusqu'au point $\tau = +\infty$.

3) Appliquons le plan des τ muni de la coupure susmentionnée sur le demi-plan $\operatorname{Im} w > 0$ par l'intermédiaire de la fonction $w = \sqrt{\tau}$ (plus précisément, à l'aide de la branche de cette fonction qui prend des valeurs positives sur la borne supérieure de la coupure). Donc,

$$w = \sqrt{\tau} = \sqrt{t + a^2} = \sqrt{z^2 + a^2}.$$

Trouver les fonctions du type $\omega = \sqrt[n]{z}$ qui appliquent les domaines suivants sur le demi-plan supérieur:

477. Le plan muni d'une coupure suivant le segment $[-1, 1]$.

478. La bande $0 < x < 1$ munie d'une coupure le long de la demi-droite $x = 1/2$, $a \leqslant y < \infty$ $(a > 0)$.

479. Le plan muni des coupures suivant les demi-droites $y = 0$, $-\infty < x \leqslant a$ et $y = 0$, $b \leqslant x < +\infty$ $(a < b)$.

3. FONCTION EXPONENTIELLE. **L'application réalisée par la fonction exponentielle**

$$w = e^z$$

est conforme dans tout le plan, car $w' = e^z \neq 0$ en tout point à distance finie du plan des z.

Si l'on décompose le plan des z en bandes

$$2k\pi < y < 2(k+1)\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

alors chacune de ces bandes sera appliquée par la fonction $w = e^z$ d'une façon biunivoque sur tout le plan des w muni d'une coupure le long de la partie positive de l'axe réel. De plus, on considère qu'à la frontière inférieure $y = 2k\pi$ et à la frontière supérieure $y = 2(k+1)\pi$ de la bande appliquée il correspond respectivement le bord supérieur et le bord inférieur de la coupure. D'autre part, les points $z_0 = x_0 + iy_0$ et $z_k = x_0 + i(y_0 + 2k\pi)$ $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ sont transformés en le même point du plan des w. Cela signifie que la fonction exponentielle est une fonction périodique de valence infinie de la variable complexe z et de période imaginaire $2\pi i$. Le domaine où cette fonction est univalente est représenté par toute bande $y_0 \leqslant y < y_0 + 2\pi$ appliquée sur le plan des w tout entier muni d'une coupure le long de la demi-droite $\operatorname{Arg} w_0 = y_0$ (fig. 21).

Il est à remarquer que la fonction exponentielle $w = e^z$ ne s'annule pour aucune valeur de z.

EXEMPLE 18. Quelle transformation subira la demi-bande

$$0 < \operatorname{Im} z < 2\pi, \qquad \operatorname{Re} z < 0$$

à l'aide de la fonction $w = e^z$?

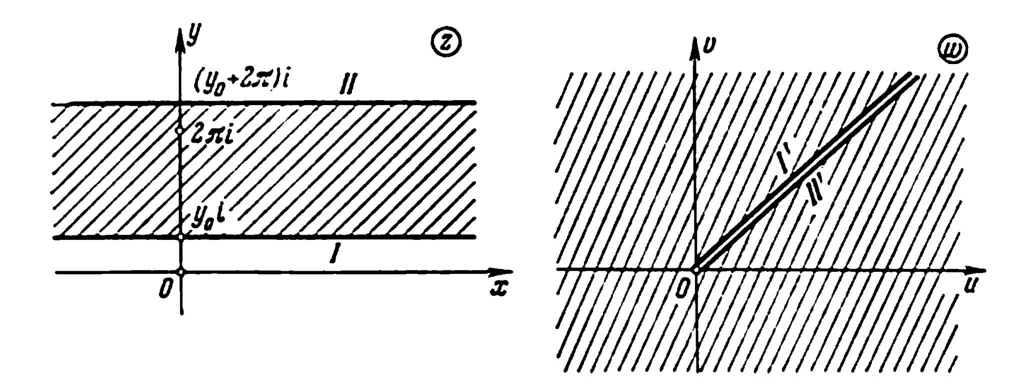


Fig. 21.

SOLUTION. Posons $z = x + iy$, $w = e^z = e^x \cdot e^{iy} = \rho e^{i\varphi}$. Alors

$$\rho = e^x, \quad \varphi = y, \quad \text{où} \quad -\infty < x < 0, \quad 0 < y < 2\pi,$$

et $0 < \rho < 1$, $0 < \varphi < 2\pi$. Il est évident que les points $w = \rho e^{i\varphi}$ qui vérifient ces conditions remplissent le disque $|w| < 1$ doté d'une coupure suivant le segment de droite qui relie les points $w = 0$ et $w = 1$. En effet, parcourons le contour γ du domaine D dans le sens positif et dans l'ordre suivant : le tronçon I ($-\infty < x < 0$, $y = 0$), ensuite, le tronçon II ($x = 0$, $0 < y < 2\pi$) et, finalement, le tronçon III ($y = 2\pi$, tandis que x varie de 0 à $-\infty$). Il est évident qu'à ces tronçons on met respectivement en correspondance dans le plan des w les tronçons I', II', III', où le tronçon I' se confond avec le bord supérieur de la coupure, alors que le tronçon III' coïncide avec le bord inférieur de celle-ci (fig. 22).

4. LA FONCTION LOGARITHMIQUE

$$w = \operatorname{Ln} z$$

est la fonction réciproque de la fonction exponentielle. Pour fixer les idées, nous allons considérer la détermination principale du logarithme de z, c'est-à-dire la valeur qui correspond à la détermination principale de l'argument

$$\ln z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z, \quad -\pi < \operatorname{Arg} z \leqslant \pi.$$

Cette fonction est analytique en tous les points à distance finie $z \neq 0$ et $w' = \frac{1}{z} \neq 0$. Cela signifie que l'application réalisée par la fonction $w = \ln z$ est conforme en tous les points mentionnés ci-dessus. Remarquons que les points $z = 0$ et $z = \infty$ sont des points de branchement de la fonction $w = \operatorname{Ln} z$ de plus $\operatorname{Ln} 0 = \infty$ et $\operatorname{Ln} \infty = \infty$.

Si le point $z = 0$ est contourné (dans le même sens) un nombre fini de fois, on ne revient jamais à la branche initiale de la fonction $\operatorname{Ln} z$. Les points de ce type sont appelés points logarithmiques.

EXEMPLE 19. Trouver la fonction qui applique le plan des z muni d'une coupure le long de la partie négative de l'axe réel de $z = 0$ à $z = -\infty$ sur la bande $-\pi < v < \pi$ dans le plan des w.

SOLUTION. Lors de l'étude de la fonction exponentielle $w = e^z$ (cf. ci-avant), il a été indiqué que toute bande $y_0 \leqslant y < y_0 + 2\pi$ est appliquée par cette fonction sur le plan des w tout entier muni d'une coupure suivant la demi-droite $\operatorname{Arg} w_0 = y_0$.

Examinons maintenant l'application réciproque, c'est-à-dire l'application de la bande $v_0 \leqslant v < v_0 + 2\pi$ ($v_0 = -\pi$) du plan des w sur le plan des z tout

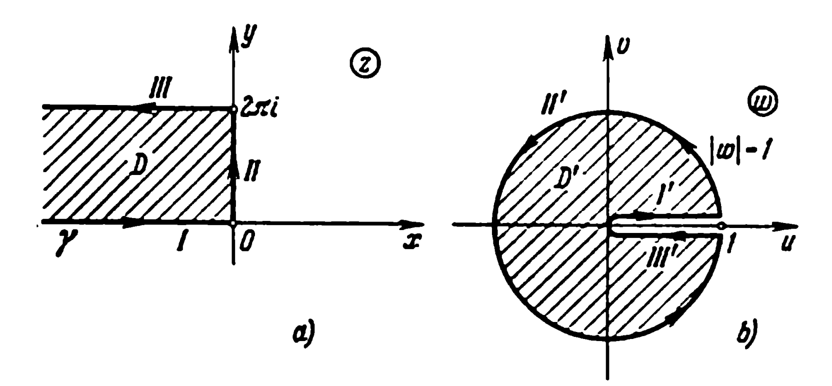


Fig. 22.

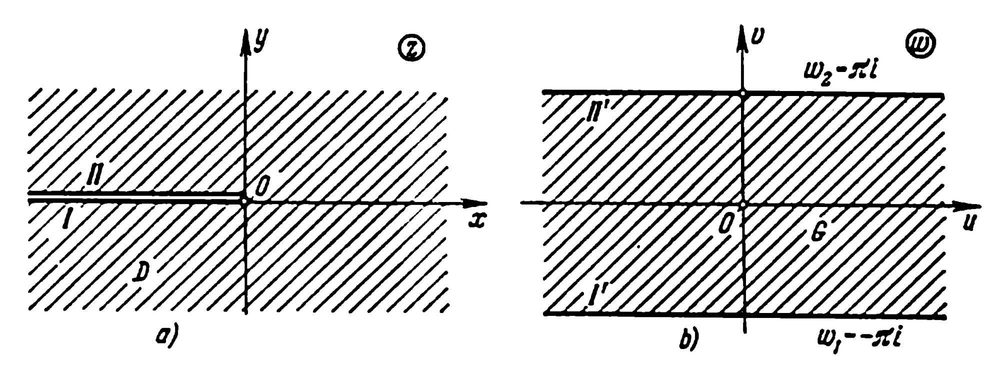


Fig. 23.

entier muni d'une coupure le long de la demi-droite Arg $z_0 = v_0 = -\pi$ (fig. 23). Il est évident qu'une telle application est obtenue à l'aide de la fonction $z = e^w$; il s'ensuit que l'application cherchée sera $w = \ln z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z$. Quand le point z parcourt la borne inférieure I de la coupure du point $x = -\infty$ jusqu'au point $x = 0$, le point correspondant décrit dans le plan des w la ligne I' de $u = +\infty$ à $u = -\infty$ $(v = -\pi)$. Ensuite, lorsque le point z parcourt la borne supérieure II de la coupure de $x = 0$ à $x = -\infty$, le point correspondant décrit dans le plan des w la ligne II' de $u = -\infty$ à $u = +\infty$ $(v = \pi)$ de façon que le domaine D et le domaine G qui lui correspond restent constamment à droite pendant le parcours.

5. FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

$$w = \sin z, \qquad w = \cos z.$$

Pour tout z complexe,

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

EXEMPLE 20. Trouver l'application de la demi-bande $0 < x < \pi$, $y > 0$ (fig. 24) réalisée à l'aide de la fonction $\cos z$.

SOLUTION. On a $\cos z = \cos (x + iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y$. Si le point z parcourt le tronçon I de la frontière depuis $y = +\infty$ jusqu'à $y = 0$ (pour $x = 0$), alors le point correspondant décrit dans le plan des w le tronçon I' de $u = +\infty$ à $u = 1$ (pour $v = 0$). Quand le point z parcourt le tronçon II de $x = 0$ à $x = \pi$ (pour $y = 0$), alors $w = \cos x$ décrit le tronçon II' de $u = 1$ à $u = -1$ (pour $v = 0$). Enfin, lorsque le point z parcourt le tronçon III de

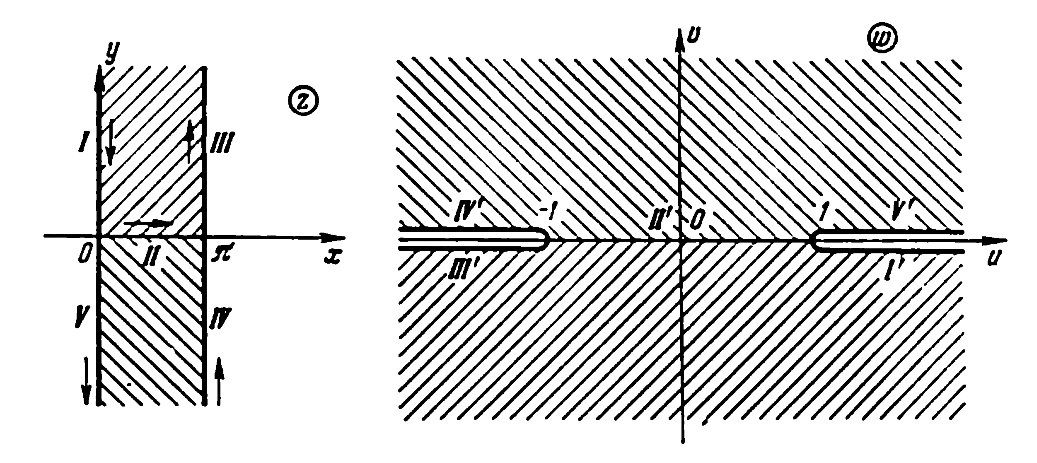


Fig. 24.

$y = 0$ à $y = +\infty$ (pour $x = \pi$), alors $w = -\text{ch}\, y$ décrit le tronçon III' de $u = -1$ à $u = -\infty$ (pour $v = 0$). Donc, si le point z décrit la frontière de la demi-bande $0 < x < \pi$, $y > 0$ de façon que celle-ci reste constamment à gauche, le point w parcourt tout l'axe réel de droite à gauche et, en vertu du principe de la correspondance biunivoque des frontières, il s'ensuit que la fonction $w = \cos z$ applique la demi-bande considérée sur le demi-plan inférieur des w.

On montre d'une façon analogue que la demi-bande $0 < x < \pi$, $y < 0$ est appliquée par la fonction $w = \cos z$ sur le demi-plan supérieur des w.

Au côté $x = \pi$, $y < 0$ de la demi-bande il correspond le segment $-\infty < u < -1$ de l'axe réel du plan des w ; au côté $0 < x < \pi$, $y = 0$ (il est parcouru de π vers 0), le segment $-1 < u < 1$; au côté $x = 0$, $y < 0$, le segment $1 < u < +\infty$. Le segment $-\infty < u < -1$ de l'axe réel du plan des w est parcouru deux fois, car c'est sur lui que sont appliqués le côté $x = \pi$, $y > 0$ de la première demi-bande et le côté $x = \pi$, $y < 0$ de la deuxième demi-bande. Pour que l'application $w = \cos z$ soit biunivoque, il faut pratiquer une coupure dans le plan des w le long de l'axe réel de $-\infty$ à -1 (de même que de 1 à $+\infty$).

De cette façon, on voit que la fonction $w = \cos z$ applique la bande $0 < x < \pi$ sur tout le plan des w muni des coupures le long de l'axe réel allant de $-\infty$ à -1 et de 1 à $+\infty$.

6. LA FONCTION DE JOUKOVSKI

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \qquad (12)$$

est analytique dans tout le plan, sauf au point $z = 0$, où elle possède un pôle d'ordre 1.

La dérivée de la fonction de Joukovski $w' = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{z^2}\right) \neq 0$ pour $z \neq \pm 1$, ce qui signifie que l'application qu'elle réalise est partout conforme à l'exception des points $z = \pm 1$. La fonction $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ réalise une représentation conforme du domaine $|z| < 1$ sur tout le plan des w présentant une coupure le long du segment $[-1, 1]$ de l'axe réel. La frontière du domaine (la circonférence $|z| = 1$) est appliquée sur ce segment de façon que la demi-circonférence supérieure s'applique sur la borne inférieure de la coupure, tandis que la demi-circonférence inférieure vient sur la borne supérieure.

D'une façon analogue, le domaine $|z| > 1$ s'applique sur le deuxième exemplaire du plan des w présentant une coupure suivant le segment $[-1, 1]$ de l'axe réel, de plus, la demi-circonférence supérieure $|z| = 1$, $\text{Im}\, z > 0$

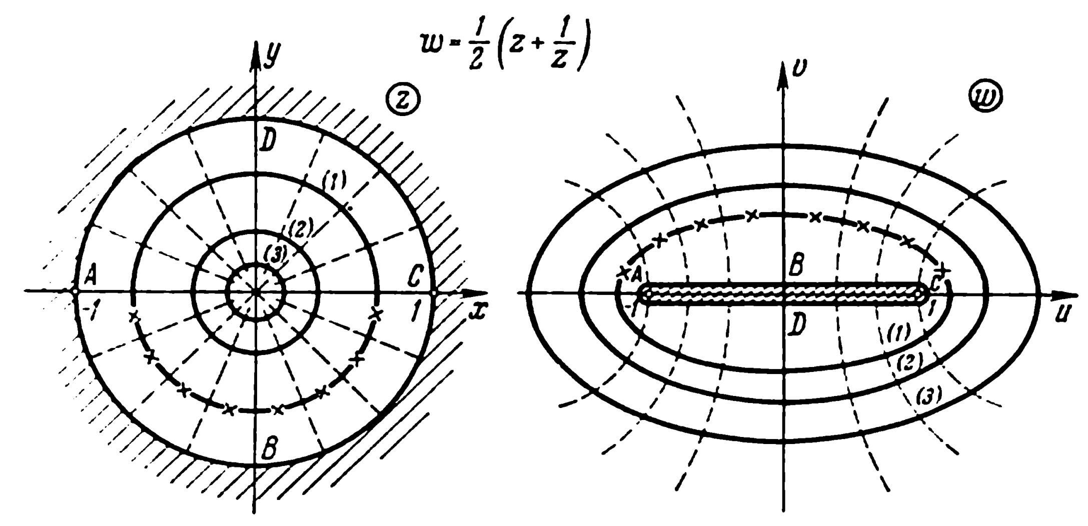


Fig. 25.

est appliquée sur la borne supérieure, alors que la demi-circonférence inférieure $|z| = 1$, $\operatorname{Im} z < 0$ l'est sur la borne inférieure de la coupure (fig. 25).

Toute circonférence de rayon $R \neq 1$ est transformée par la fonction (12) en une ellipse de demi-axes

$$a = \frac{1}{2}\left(R + \frac{1}{R}\right), \qquad b = \frac{1}{2}\left|R - \frac{1}{R}\right|$$

et de foyers aux points $(-1, 0)$ et $(1, 0)$. Les demi-droites $\operatorname{Arg} z = \varphi$ (excepté $\varphi = 0, \pm\frac{\pi}{2}, \pi$) sont appliquées sur les branches correspondantes de l'hyperbole

$$\frac{u^2}{\cos^2\varphi} - \frac{v^2}{\sin^2\varphi} = 1;$$

les demi-droites $\operatorname{Arg} z = 0$, $\operatorname{Arg} z = \pm\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{Arg} z = \pi$ sont appliquées sur les segments de l'axe réel ou de celui imaginaire et parcourus deux fois et allant jusqu'à l'infini.

EXEMPLE 21. Trouver l'image du domaine

$$0 < |z| < 1, \qquad 0 < \operatorname{Arg} z < \frac{\pi}{4}$$

à l'aide de la fonction de Joukovski.

SOLUTION. Portons $z = re^{i\varphi}$ dans la fonction de Joukovski

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

et, en séparant les parties réelle et imaginaire, on obtient

$$\begin{cases} u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi, \\ v = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi. \end{cases}$$

En parcourant le contour du secteur dans le sens positif $OABO$ (fig. 26), on aboutit aux résultats suivants: le segment OA est transformé en un segment

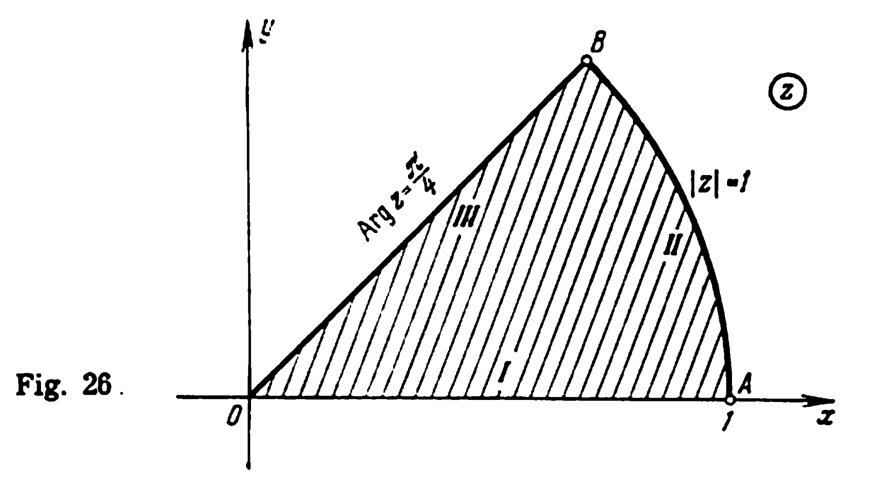


Fig. 26.

Fig. 27.

allant jusqu'à l'infini de l'axe réel parcouru de $u = +\infty$ à $u = 1$ (fig. 27); l'arc AB de la circonférence $|z| = 1$ est transformé en le segment $A'B'$ de l'axe réel; le segment BO vient sur la courbe

$$u = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(r + \frac{1}{r}\right), \qquad v = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(r - \frac{1}{r}\right)$$

ou $u^2 - v^2 = \frac{1}{2}$ (c'est une hyperbole).

En conformité avec le principe de correspondance biunivoque des frontières, on trouve que le secteur donné est transformé par la fonction de Joukovski en le domaine

$$u^2 - v^2 > \frac{1}{2}, \qquad u > \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad v < 0.$$

EXEMPLE 22. Appliquer sur le demi-plan supérieur le disque unité muni d'une coupure orientée suivant l'axe réel et sortant du centre.

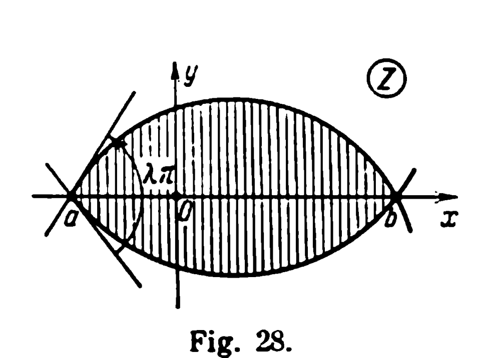


Fig. 28.

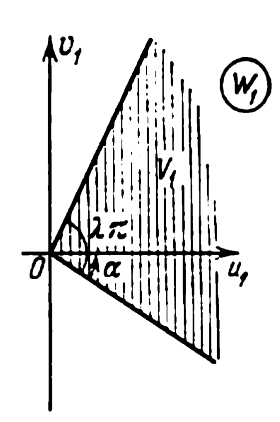


Fig. 29.

SOLUTION. 1) A l'aide de la fonction $w_1 = \sqrt{z}$, appliquons le disque unité sur le demi-disque supérieur. Dans ce cas, la borne supérieure de la coupure OA, c'est-à-dire le segment $[-1, 0]$, reste sur place, alors que la borne inférieure OA' est transformée en le segment $[-1, 0]$ dans le plan W_1.

2) A l'aide de la fonction

$$w_2 = \frac{w_1+1}{w_1-1},$$

appliquons la demi-circonférence obtenue comme indiqué au n° 1) ci-dessus sur le Ier quadrant du plan W_2. Dans ce cas, le point $w_1 = 1$ se transforme en le point $w_2 = \infty$, alors que le point $w_1 = -1$ devient le point $w_2 = 0$.

3) Finalement, appliquons à l'aide de la fonction $w = w_2^2$ le Ier quadrant sur le demi-plan supérieur.

En fin de compte, on obtient

$$w = w_2^2 = \left(\frac{w_1+1}{w_1-1}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{z}+1}{\sqrt{z}-1}\right)^2.$$

EXEMPLE 23. Trouver la fonction qui applique le domaine compris entre deux circonférences concourantes en les points réels $z = a$ et $z = b$ $(a < b)$ sous l'angle $\pi\lambda$, $0 < \lambda < 1$ (fig. 28) sur le demi-plan supérieur $\operatorname{Im} w > 0$ de façon que le point $z = a$ soit transformé en le point $w = 0$, alors que le point $z = b$ vienne sur le point $w = \infty$.

SOLUTION. 1) Transformons la lunule ab en un angle de dimension $\lambda\pi$, $0 < \lambda < 1$ de façon que les points $z = a$ et $z = b$ soient respectivement transformés en les points $w = 0$ et $w = \infty$. Cette opération est effectuée à l'aide de la fonction $w_1 = \frac{z-a}{b-z}$ (fig. 29).

2) La transformation $w_2 = w_1 e^{i\varphi}$ fait tourner l'angle V_1 d'ouverture $\lambda\pi$ dans le sens antihoraire de l'angle α. Ainsi, obtient-on dans le plan W_2 l'angle V_2 qui présente la même ouverture que l'angle V_1 (fig. 30).

3) La transformation $w = w_2^{1/\lambda}$ transforme l'angle V_2 en un demi-plan. De cette façon, la transformation cherchée est de la forme

$$w = c\left(\frac{z-a}{b-z}\right)^{1/\lambda},$$

où c est une certaine constante complexe choisie de telle sorte que l'application soit réalisée sur le demi-plan supérieur.

EXEMPLE 24. Trouver la fonction qui réalise la représentation conforme du domaine D: $|z| < 2$, $|z-1| > 1$ (fig. 31) sur le demi-plan supérieur.

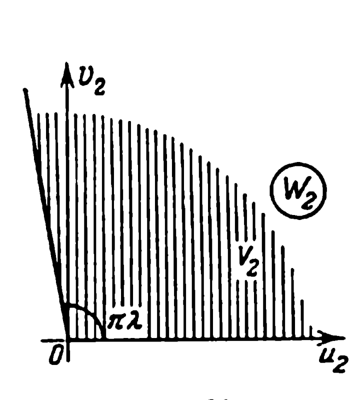


Fig. 30.

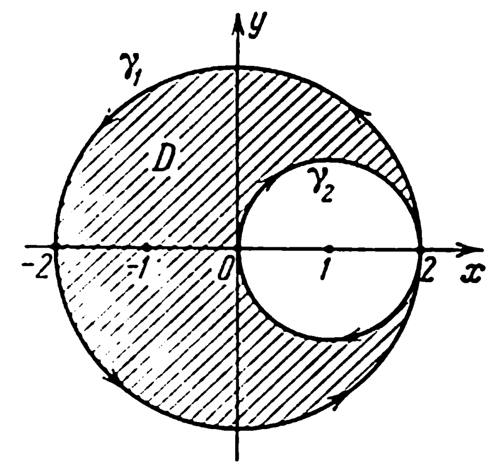


Fig. 31.

SOLUTION. 1) La fonction

$$w_1 = \frac{z}{z-2} \tag{13}$$

applique le domaine donné sur la bande $\Pi_1 : \left\{ 0 < u < \frac{1}{2}, -\infty < v < +\infty \right\}$.
En effet, en posant $z = 2e^{i\varphi}$, on obtient

$$w_1 = u + iv = \frac{2e^{i\varphi}}{2e^{i\varphi}-2} = \frac{e^{i\varphi}}{e^{i\varphi}-1} \quad (0 \leqslant \varphi < 2\pi).$$

Après avoir séparé les parties réelle et imaginaire, il vient

$$u = \frac{1}{2}, \qquad v = -\frac{\cos\frac{\varphi}{2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}}.$$

De cette façon, la circonférence $|z| = 2$ est transformée par la fonction $w_1 = \frac{z}{z-2}$ en la droite

$$u = \frac{1}{2}, \qquad v = -\frac{\cos\frac{\varphi}{2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}},$$

qui est parcourue de bas en haut (fig. 32). En particulier, les points $z_1 = 2i$, $z_2 = -2$ et $z_3 = -2i$ seront transformés respectivement en les points $w = \frac{1-i}{2}$, $w = \frac{1}{2}$ et $w = \frac{1+i}{2}$. La même fonction transforme la circonférence $|z - 1| = 1$ en la droite $u = 0$, $-\infty < v < +\infty$. En effet, si l'on porte $z = 1 + e^{i\varphi}$ dans (13), on obtient

$$w_1 = u_1 + iv_1 = \frac{e^{i\varphi}+1}{e^{i\varphi}-1} = -i\frac{\cos\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}, \qquad \text{d'où} \quad u_1 = 0, \quad v_1 = -\frac{\cos\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}},$$

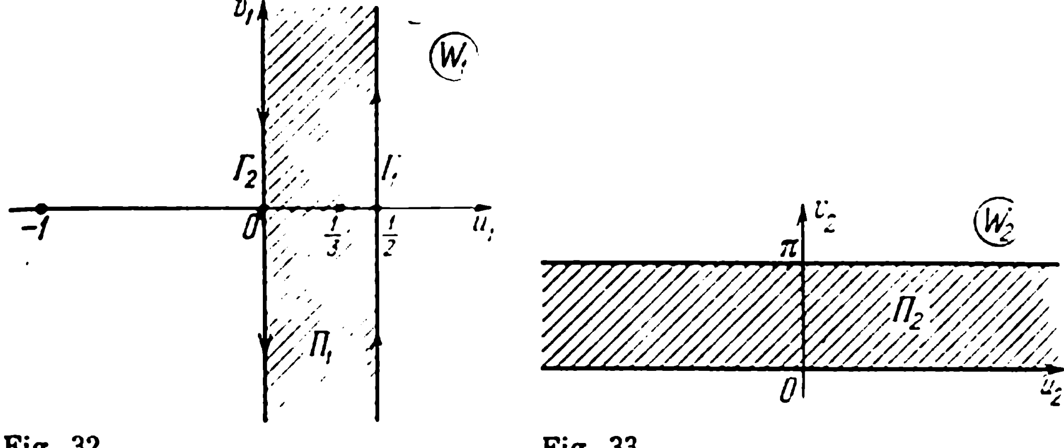


Fig. 32. Fig. 33.

où φ varie de 2π à 0. Cela signifie que si le point z parcourt la circonférence γ_2, le point correspondant w_1 décrit la droite Γ_2 (l'axe v_1 dans le plan W_1) de haut en bas. Par l'application $w_1 = \frac{z}{z-2}$, le point intérieur $z = -1$ du domaine D est transformé en le point intérieur $w_1 = \frac{1}{3}$ de la bande Π_1 (fig. 32). Il s'ensuit que la fonction $w_1 = \frac{z}{z-2}$ réalise l'application du domaine D sur la bande Π_1.

2) La fonction $w_2 = 2\pi i w_1$ transforme la bande verticale

$$\Pi_1 : \left\{0 < u_1 < \frac{1}{2}, \quad -\infty < v_1 < +\infty\right\}$$

en la bande horizontale

$$\Pi_2 : \{-\infty < u_2 < +\infty, \ 0 < v_2 < \pi\} \qquad \text{(fig. 33).}$$

3) La fonction $w = e^{w_2}$ transforme la bande Π_2 en le demi-plan supérieur W Finalement, on obtient

$$w = e^{w_2} = e^{2\pi i w_1} = e^{2\pi i \frac{z}{z-2}}.$$

480. Trouver la fonction qui applique le disque unité sur le plan muni d'une coupure suivant le demi-axe réel positif.

481. Trouver la fonction qui applique l'angle que font entre elles les demi-droites

$$z = z_0 + e^{i\varphi_1}t, \qquad z = z_0 + e^{i\varphi_2}t,$$

où $t \geqslant 0$, $0 < \varphi_1 < \varphi_2$, sur le demi-plan supérieur.

482. Trouver la fonction qui applique la bande horizontale $\{0 \leqslant x < +\infty, \ 0 \leqslant y \leqslant \pi\}$ sur le demi-disque supérieur $|z| < < 1$.

483. Appliquer sur le demi-plan supérieur la demi-bande $\{0 \leqslant x < +\infty, \ 0 \leqslant y \leqslant \pi\}$.

484. Sur quoi la fonction $w = \ln z$ applique-t-elle la demi-couronne $\{r \leqslant \rho \leqslant R, \ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi\}$ disposée dans le plan des z?

485. Trouver la fonction qui applique le domaine $\pi/2 < \operatorname{Arg} z < \pi$ sur le domaine $0 < \operatorname{Arg} w < \pi/4$.

486. Appliquer le plan muni de la coupure rectiligne $0 < a < x < b$ suivant l'axe réel sur le demi-plan supérieur des w.

487. Appliquer le plan des z muni des coupures rectilignes $(-\infty, b)$, $(a, +\infty)$, où a et b sont des nombres réels $(b < a)$, sur le demi-plan $\operatorname{Im} w > 0$.

488. Trouver la fonction qui applique le I[er] quadrant $0 \leqslant \operatorname{Arg} z \leqslant \pi/2$ sur le disque $|w| < 1$ de façon qu'aux points $z = 1 + i$, $z = 0$ on associe respectivement les points $w = 0$, $w = 1$.

Dans les problèmes qui suivent, trouver le domaine du plan des w sur lequel la fonction $w = f(z)$ indiquée applique le domaine D donné du plan des z:

489. $w = z^2 + 1$, D: le quart $0 < \operatorname{Arg} z < \pi/2$ du disque $|z| < 1$.

490. $w = e^{2z}$, D: la demi-bande $0 < \operatorname{Im} z < \pi/4$, $\operatorname{Re} z < 0$.

491. $w = \ln z + 1$, D: la partie de la couronne circulaire $1 < |z| < e$ comprise dans l'angle $0 < \operatorname{Arg} z < e$.

Trouver la fonction qui réalise la représentation conforme de chacun des domaines indiqués ci-dessous sur le demi-plan supérieur.

492. Le secteur $|z| < 2$, $0 < \operatorname{Arg} z < \pi/4$.

493. La bande $a < \operatorname{Re} z < b$, $a > 0$.

Trouver les fonctions qui appliquent:

494. Le disque $|z| < 1$ muni d'une coupure suivant le rayon reliant le point $z = 0$ au point $z = -1$ sur la demi-bande $-\pi < v < \pi$, $u < 0$.

495. La demi-bande $0 < \operatorname{Im} z < \pi$, $\operatorname{Re} z > 0$ sur le demi-plan $\operatorname{Im} w > 0$.

496. La bande $-\infty < \operatorname{Re} z < +\infty$, $0 < \operatorname{Im} z < \pi/2$ sur le plan des w muni des coupures $-\infty < u \leqslant -1$, $v = 0$ et $1 \leqslant u < +\infty$, $v = 0$.

497. La lunule bornée par les circonférences $|z - 1| = 1$, $|z - 2| = 2$ sur la bande $0 < \operatorname{Re} w < 1$.

498. Trouver la fonction homographique qui applique le domaine D: $\{|z + 1| > 1;\ |z + 2| < 2\}$ sur la bande P: $\{0 < \operatorname{Im} w < 1\}$.

499. Trouver la fonction qui applique la lunule comprise entre les circonférences $|z - 1| = 1$, $|z + i| = 1$ sur le demi-plan $\operatorname{Re} w > 0$.

500. En utilisant la fonction de Joukovski, trouver la fonction qui applique la couronne $1 < |z| \leqslant 2$ sur le domaine $\frac{u^2}{25} + \frac{v^2}{9} \leqslant 1$ muni de la coupure $-4 \leqslant u \leqslant 4$, $v = 0$.

501. Transformer le demi-plan supérieur $\operatorname{Im} z > 0$ privé du demi-disque $|z| < 1/2$ en le disque $|w| < 1$.

502. Trouver la représentation conforme du secteur $0 < \operatorname{Arg} z < \pi/8$ sur le disque unité $|w| < 1$ qui transforme le point $z_1 = e^{i\frac{\pi}{16}}$ en le centre $w_1 = 0$ et le point $z = 0$ en le point $w = 1$.

503. Appliquer la bande $0 < x < \pi/4$ sur le Ier quadrant $0 < \operatorname{Arg} w < \pi/2$.

504. Trouver les domaines en lesquels la fonction $w = \operatorname{tg} z$ transforme :

a) la bande $-\frac{\pi}{4} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{4}$; b) la bande $0 < \operatorname{Re} z < \pi$.

§ 13. Potentiel complexe et son sens hydrodynamique

Soit

$$\mathbf{a} = P(x, y)\,\mathbf{i} + Q(x, y)\,\mathbf{j}, \tag{1}$$

un champ vectoriel plan stationnaire, où **i** et **j** sont respectivement les vecteurs unités des axes de coordonnées Ox et Oy.

Etant donné que le point (x, y) du plan xOy et son rayon vecteur $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ représentent le nombre complexe $z = x + iy$ (ici on désigne par i l'unité imaginaire), le vecteur $\mathbf{a} = P(x, y)\,\mathbf{i} + Q(x, y)\,\mathbf{j}$ représente à son tour le nombre complexe $P(x, y) + iQ(x, y)$. C'est pour cela que le vecteur **a** et l'expression (1) peuvent s'écrire

$$\mathbf{a} = P(x, y) + iQ(x, y).$$

Par conséquent, le champ vectoriel (1) peut être donné en indiquant deux fonctions réelles $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ de deux variables réelles x et y, ou bien une fonction de la variable complexe z

$$f(z) = P(x, y) + iQ(x, y).$$

APPLICATION DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE COMPLEXE À L'HYDRODYNAMIQUE

Un écoulement plan stationnaire non turbillonnaire d'un liquide incompressible est parfaitement caractérisé par la fonction analytique $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ qui est appelée *potentiel complexe* ou *fonction caractéristique d'écoulement*. La partie réelle $u(x, y)$ et la partie imaginaire $v(x, y)$ sont respectivement appelées *fonction potentiel* et *fonction de courant*.

Les lignes $u(x, y) = \text{const}$ s'appellent *lignes équipotentielles* ou *lignes de niveau*. Les lignes $v(x, y) = \text{const}$ sont appelées *lignes de courant*.

Chaque particule de liquide se déplace suivant une ligne de courant.

On sait que la vitesse **V** d'un écoulement de liquide donné par une fonction $f(z)$ est définie en tout point $z = x + iy$ aussi bien en valeur qu'en direction par le nombre complexe

$$\mathbf{V} = Ve^{i\varphi} = V_{Ox} + iV_{Oy} = \overline{f'(z)} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y},$$

c'est-à-dire par un nombre qui est le conjugué de la valeur que prend la dérivée du potentiel complexe au point z. La valeur de la vitesse est donnée par l'expression

$$V = |\mathbf{V}| = |\overline{f'(z)}| = |f'(z)|,$$

tandis que l'angle formé entre la direction du vecteur vitesse V et le sens positif de l'axe Ox sera

$$\varphi = \operatorname{Arg} \overline{f'(z)} = -\operatorname{Arg} f'(z).$$

Les projections V_{Ox} et V_{Oy} du vecteur vitesse V sur les axes de coordonnées Ox et Oy sont égales à

$$V_{Ox} = np_{Ox} \mathbf{V} = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad V_{Oy} = np_{Oy} \mathbf{V} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

ou bien, en vertu des conditions de Cauchy-Riemann,

$$V_{Ox} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad V_{Oy} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Il en découle que

$$\mathbf{V} = \operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Supposons que les coordonnées $V_{Ox} = V_{Ox}(x, y)$ et $V_{Oy} = V_{Ox}(x, y)$ du vecteur vitesse V dans le domaine de leur définition sont des fonctions continûment différentiables, sauf peut-être en un nombre fini de points.

DÉFINITION. On appelle *circulation du vecteur vitesse* V le long d'une courbe fermée L parcourue dans le sens positif la grandeur

$$\Gamma_L = \oint_L V_{Ox}\, dx + V_{Oy}\, dy = \oint_L \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = \oint_L \frac{\partial u}{\partial x} dx - \frac{\partial v}{\partial x} dy.$$

La circulation Γ_L caractérise le degré de turbulence de l'écoulement de liquide. Ici on suppose que la courbe L ne possède pas de points singuliers, alors qu'à l'intérieur de cette courbe il ne peut y en avoir qu'un nombre fini.

DÉFINITION. On appelle *flux du vecteur vitesse* V à travers une courbe fermée L la grandeur

$$N_L = \oint_L V_{Ox}\, dy - V_{Oy}\, dx = \oint_L \frac{\partial u}{\partial x} dy - \frac{\partial u}{\partial y} dx = \oint_L \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy.$$

La courbe L est parcourue dans le sens positif, c'est-à-dire que, pendant le parcours de L, le domaine que cette courbe détermine reste constamment à gauche (ici on considère la normale extérieure à la courbe fermée L). On suppose en outre que la courbe L ne passe pas par les points singuliers de la vitesse V, c'est-à-dire de la dérivée $f'(z)$.

Le flux N_L du vecteur vitesse V détermine la quantité de liquide qui traverse la ligne L par unité de temps.

Les formules traduisant la circulation Γ_L et le flux N_L du vecteur vitesse V sont réunies en une seule

$$\Gamma_L + iN_L = \oint_L f'(z)\, dz, \tag{2}$$

qui permet de trouver la circulation et le flux à l'aide des résidus. Dans le cas où la dérivée $f'(z)$ (donc, la vitesse $\mathbf{V} = \overline{f'(z)}$ aussi) possède un nombre fini des points singuliers z_k ($k = 1, 2, \ldots, n$),

$$\Gamma_L + iN_L = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res} f'(z_k).$$

Les points où $V = 0$, donc, $f'(z) = 0$, sont appelés *points critiques* de l'écoulement.

EXEMPLE 1. L'écoulement d'un liquide est donné par le potentiel complexe $f(z) = z^2$. Trouver le potentiel des vitesses, la fonction de courant, les lignes de niveau, les lignes de courant, la valeur et la direction du vecteur vitesse **V**, les projections V_{Ox} et V_{Oy} du vecteur vitesse **V** sur les axes de coordonnées Ox et Oy.

SOLUTION. En posant $z = x + iy$, on a

$$f(z) = (x^2 - y^2) + i2xy,$$

d'où l'on tire le potentiel des vitesses $u(x, y) = x^2 - y^2$ et la fonction de courant $v(x, y) = 2xy$. Les lignes de niveau $u(x, y) = \text{const}$ sont représentées par les hyperboles $x^2 - y^2 = \text{const}$. Les lignes de courant $v(x, y) = \text{const}$ sont données par les hyperboles $xy = \text{const}$. La valeur du vecteur vitesse est donnée par l'expression

$$V = |\overline{f'(z)}| = |2\bar{z}| = 2\sqrt{x^2 + y^2}.$$

La direction du vecteur vitesse est déterminée par l'angle

$$\varphi = -\operatorname{Arg} f'(z) = -\operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

Les projections du vecteur vitesse sur les axes de coordonnées Ox et Oy sont

$$V_{Ox} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \qquad V_{Oy} = \frac{\partial u}{\partial y} = -2y.$$

L'origine des coordonnées constitue un point de repos du liquide.

EXEMPLE 2. Soit $f(z) = \ln \operatorname{sh} \pi z$ le potentiel complexe qui définit l'écoulement d'un liquide. Trouver la valeur du flux N_L à travers la circonférence $2|z| = 3$ et la circulation Γ_L le long de cette circonférence.

SOLUTION. On trouve la dérivée du potentiel complexe:

$$f'(z) = \pi \coth \pi z.$$

En appliquant la formule (2), on obtient

$$\Gamma_L + iN_L = \pi \int\limits_{|z|=3/2} \coth \pi z \, dz = \pi \int\limits_{|z|=3/2} \frac{\operatorname{ch} \pi z}{\operatorname{sh} \pi z} \, dz.$$

La fonction figurant sous le signe d'intégration admet à l'intérieur de la circonférence $2|z| = 3$ trois pôles simples $z_1 = -i$, $z_2 = 0$, $z_3 = i$. Les résidus de la fonction susmentionnée en ces points seront

$$\operatorname{Res} f(z_k) = \pi \frac{1}{\pi} = 1, \quad k = 1, 2, 3.$$

Alors

$$\int\limits_{|z|=3/2} \coth \pi z \, dz = 6\pi i.$$

Par conséquent,

$$\Gamma_L + iN_L = 6\pi^2 i.$$

D'ici on trouve que la circulation $\Gamma_L = 0$ et que le flux $N_L = 6\pi^2$.

EXEMPLE 3. Trouver le potentiel complexe $f(z)$ d'un écoulement de liquide si l'on connaît les équations des lignes équipotentielles

$$\operatorname{ch} x \sin y + 2xy = c,$$

où $c = \text{const}$ et $f(0) = 0$.

SOLUTION. Des conditions du problème il découle que la fonction potentiel $u(x, y)$, c'est-à-dire la partie réelle de la fonction analytique $f(z)$ (c'est le potentiel complexe cherché), est égale à

$$u = 2xy + \operatorname{ch} x \sin y$$

et le problème se ramène à la reconstitution d'une fonction analytique à partir de sa partie réelle.

Trouvons la fonction $f(z)$ d'après sa partie réelle $u(x, y)$ qui est connue. On a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2y + \operatorname{sh} x \sin y.$$

En vertu de la première des conditions de Cauchy-Riemann, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ et

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 2y + \operatorname{sh} x \sin y.$$

D'où l'on tire

$$v(x, y) = y^2 - \operatorname{sh} x \cos y + \varphi(x),$$

où $\varphi(x)$ est une fonction différentiable arbitraire. En dérivant $v(x, y)$ par rapport à x et en utilisant la deuxième des conditions de Cauchy-Riemann, on trouve

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\operatorname{ch} x \cos y + \varphi'(x) = -\frac{\partial u}{\partial y} = -2x - \operatorname{ch} x \cos y,$$

d'où $\varphi'(x) = -2x$, donc, $\varphi(x) = -x^2 + c$, $c = \text{const}$. C'est-à-dire

$$v(x, y) = y^2 - x^2 - \operatorname{sh} x \cos y + c.$$

Par conséquent,

$$f(z) = 2xy + \operatorname{ch} x \sin y + i(y^2 - x^2 - \operatorname{sh} x \cos y) + ic.$$

Compte tenu de la condition $f(0) = 0$, on a $0 + i0 = c$, $c = 0$.

De cette façon, le potentiel complexe cherché sera

$$f(z) = 2xy + \operatorname{ch} x \sin y + i(y^2 - x^2 - \operatorname{sh} x \cos y)$$

ou

$$f(z) = -i(z^2 + \operatorname{sh} z).$$

D'après le potentiel complexe indiqué qui définit l'écoulement d'un liquide, trouver le potentiel des vitesses, la fonction de cou-

rant, les lignes de niveau, les lignes de courant, la valeur et la direction du vecteur vitesse, les projections de la vitesse sur les axes de coordonnées:

505. $f(z) = z^2 + 2z + 2$. **506.** $f(z) = \frac{1}{z^2}$.

507. $f(z) = \ln(z - 1)$.

508. Construire le potentiel complexe de l'écoulement d'un liquide si l'équation des lignes de niveau est connue:

$$x^2 - y^2 + 2xy + x = \text{const} \quad \text{et} \quad f(0) = 0.$$

509. Construire le potentiel complexe de l'écoulement d'un liquide si l'équation des lignes de courant est connue:

$$\cos x \operatorname{sh} y = \text{const} \quad \text{et} \quad f(0) = 0.$$

510. Trouver la circulation le long de la circonférence $|z \pm a| = a$ si le potentiel complexe de l'écoulement de liquide est connu:

$$f(z) = 5i \ln(z^2 - a^2).$$

CHAPITRE II

CALCUL OPÉRATIONNEL

§ 14. Recherche des images et des originaux

On appelle *original* toute fonction à valeurs complexes $f(t)$ d'argument réel t qui satisfait aux conditions suivantes:

1°. $f(t)$ est intégrable sur tout intervalle fini de l'axe des t (elle est localement intégrable).

2°. Pour tous les t négatifs,

$$f(t) = 0.$$

3°. $|f(t)|$ ne croît pas plus rapidement que la fonction exponentielle lorsque $t \to +\infty$, c'est-à-dire qu'il existe des constantes $M > 0$ et s telles que pour tous les t,

$$|f(t)| \leqslant Me^{st}. \quad (1)$$

La borne inférieure s_0 de tous les nombres s qui vérifient l'inégalité (1) est appelée indice de croissance de la fonction $f(t)$.

EXEMPLE 1. Montrer que la fonction

$$f(t) = \begin{cases} e^{2t} \sin 3t, & t > 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

est un original.

En effet, la fonction $f(t)$ est localement intégrable:

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{2t} \sin 3t \, dt$$

et existe pour tous les t_1 et t_2 finis.

La condition 2° est remplie en vertu de la définition de la fonction.

Enfin, pour tous les t réels, on a

$$|e^{2t} \sin 3t| \leqslant e^{2t},$$

ce qui signifie que M figurant dans la condition 3° peut être représentée par n'importe quel nombre $\geqslant 1$; $s_0 = 2$.

L'original le plus simple est la fonction dite échelon unité de Heaviside

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Il est évident que

$$\varphi(t)\,\eta(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t > 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

donc, si $\varphi(t)$ satisfait aux conditions 1° et 3°, alors $\varphi(t)\,\eta(t)$ vérifie toutes les conditions qui définissent un original.

511. Indiquer les originaux figurant parmi les fonctions ci-desous:
a) $f(t) = b^t\eta(t)$, $b > 0$, $b \neq 1$; b) $f(t) = e^{(2+4i)t}\eta(t)$;
c) $f(t) = \frac{1}{t-3}\eta(t)$; d) $f(t) = t^2\eta(t)$;
e) $f(t) = \text{ch}\,(3-i)\,t\eta(t)$; f) $f(t) = \text{tg}\,t\eta(t)$;
g) $f(t) = t^t\eta(t)$; h) $f(t) = e^{-t}\cos t\eta(t)$;
i) $f(t) = e^{t^2}\eta(t)$; j) $f(t) = e^{-t^2}\eta(t)$; k) $f(t) = \frac{1}{t^2+2}\eta(t)$;
l) $f(t) = \eta(t) + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\eta(t-k)$.

Dans ce qui suit, pour simplifier l'écriture, la notation $f(t)\,\eta(t)$ sera remplacée, en règle générale, par $f(t)$, ayant en vue que les fonctions examinées ont comme prolongement zéro pour les t négatifs.

Selon la transformation de Laplace, on appelle *image de la fonction* $f(t)$ la fonction $F(p)$ de la variable complexe $p = s + i\sigma$ définie par l'égalité

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)\,e^{-pt}\,dt. \tag{2}$$

Le fait que $F(p)$ est l'image de la fonction $f(t)$ sera noté par le symbole

$$f(t) \risingdotseq F(p).$$

La fonction $F(p)$ est définie dans le demi-plan Re $p = s > s_0$ *et est analytique dans ce demi-plan.*

EXEMPLE 2. En partant de la définition ci-dessus, trouver l'image de la fonction

$$f(t) = e^{2t}.$$

SOLUTION. Pour la fonction $f(t) = e^{2t}$, on a $s_0 = 2$. C'est pour cela que l'image $F(p)$ sera en tout cas définie et analytique dans le demi-plan Re $p > 2$. On a

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{2t}e^{-pt}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p-2)t}\,dt = \frac{1}{-(p-2)}\,e^{-(p-2)t}\Big|_{t=0}^{t=+\infty} = \frac{1}{p-2}$$

$$(\text{Re}\,p = s > 2).$$

Donc, $F(p) = \frac{1}{p-2}$. Cette fonction est analytique pour Re $p > 2$, étant en outre analytique partout, sauf au point $p = 2$. Cela n'est pas en opposition avec l'affirmation ci-dessus, car cette dernière ne fait que *garantir* l'analyticité de $F(p)$ pour Re $p > s_0$, sans affirmer pour autant que si Re $p < s_0$, $F(p)$ n'est pas analytique où que ce soit.

En vertu de la définition, trouver les images des fonctions suivantes:

512. $f(t) = t$. **513.** $f(t) = \sin 3t$.
514. $f(t) = te^t$. **515.** $f(t) = t^\alpha$ $(\alpha > -1)$.

516. Est-ce que la fonction $\varphi(p) = \frac{1}{\cos p}$ peut être l'image d'un certain original?

PROPRIÉTÉS DE LA TRANSFORMATION DE LAPLACE

THÉORÈME D'UNICITÉ. *La transformation de Laplace*

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\, dt$$

est unique dans le sens que deux fonctions $f_1(t)$ et $f_2(t)$ qui possèdent les mêmes transformations de Laplace coïncident en tous les points de continuité pour tous les $t > 0$.

Il y a des fonctions discontinues différentes qui peuvent avoir la même transformation de Laplace (on propose au lecteur de construire une telle fonction).

I. PROPRIÉTÉ DE LINÉARITÉ. Pour n'importe quelles constantes complexes α et β,

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \doteqdot \alpha F(p) + \beta G(p)$$

(ici et dans ce qui suit, on considère que $f(t) \doteqdot F(p)$, $g(t) \doteqdot G(p)$).

Trouver l'image des fonctions suivantes:

517. $1 + t$. **518.** $2 \sin t - \cos t$. **519.** $t + \frac{1}{2} e^{-t}$.

II. THÉORÈME D'HOMOTHÉTIE. Pour toute constante $\alpha > 0$,

$$f(\alpha t) \doteqdot \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

En appliquant le théorème d'homothétie, trouver les images des fonctions suivantes:

520. $f(t) = e^{at}$. **521.** $f(t) = \sin 4t$.

522. a) $f(t) = \cos \omega t$; b) $f(t) = \operatorname{sh} 3t$.

523. Soit $f(t) \doteqdot F(p)$. Trouver l'image de la fonction $f\left(\frac{t}{a}\right)$ $(a > 0)$ directement et à l'aide du théorème d'homothétie.

En mettant en œuvre les théorèmes de linéarité et d'homothétie, trouver les images des fonctions suivantes:

524. $f(t) = \sin^2 t$. **525.** $f(t) = \sin mt \cos nt$.

526. $f(t) = \cos^3 t$. **527.** $f(t) = \sin mt \sin nt$.

528. $f(t) = \sin^4 t$. **529.** $f(t) = \cos mt \cos nt$.

III. DÉRIVATION DE L'ORIGINAL. Si les fonctions $f(t)$, $f'(t)$, ..., $f^{(n)}(t)$ sont des originaux et si $f(t) \doteqdot F(p)$, alors

$$f'(t) \doteqdot pF(p) - f(0),$$

$$f''(t) \doteqdot p^2 F(p) - pf(0) - f'(0),$$

. . . .

$$f^{(n)}(t) \doteqdot p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0),$$

où $f^{(k)}(0)$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ est $\lim\limits_{t \to +0} f^{(k)}(t)$.

EXEMPLE 3. Trouver l'image de la fonction $f(t) = \sin^2 t$ à l'aide du théorème de dérivation de l'original.

SOLUTION. Soit $f(t) \doteqdot F(p)$. Alors

$$f'(t) \doteqdot pF(p) - f(0).$$

Mais $f(0) = 0$, alors que $f'(t) = 2\sin t\cos t = \sin 2t \doteqdot \frac{2}{p^2+4}$. Donc, $\frac{2}{p^2+4} = pF(p)$, d'où

$$F(p) = \frac{2}{p(p^2+4)} \doteqdot \sin^2 t.$$

Trouver les images des fonctions suivantes à l'aide du théorème de dérivation de l'original:

530. $f(t) = \cos^2 t$. **531.** $f(t) = \sin^3 t$.
532. $f(t) = t\sin\omega t$. **533.** $f(t) = \cos^4 t$.
534. $f(t) = t\cos\omega t$. **535.** $f(t) = te^t$.

IV. DÉRIVATION DE L'IMAGE. La dérivation de l'image se ramène à la multiplication de l'original par $(-t)$

$$F'(p) \doteqdot -tf(t)$$

ou, en général,

$$F^{(n)}(p) \doteqdot (-t)^n f(t).$$

EXEMPLE 4. Trouver l'image de la fonction

$$f(t) = t^2e^t.$$

SOLUTION. On a $e^t \doteqdot \frac{1}{p-1}$. D'après le théorème de dérivation de l'image, $\left(\frac{1}{p-1}\right)' \doteqdot -t\,e^t$, d'où $\frac{1}{(p-1)^2} \doteqdot te^t$. Ensuite,

$$\left[\frac{1}{(p-1)^2}\right]' \doteqdot -t\,(te^t) \quad \text{ou} \quad \frac{2\,!}{(p-1)^3} \doteqdot t^2\,e^t.$$

Trouver les images des fonctions suivantes:

536. $f(t) = t^2\cos t$. **537.** $f(t) = t\,(e^t + \operatorname{ch} t)$.
538. $f(t) = (t+1)\sin 2t$. **539.** $f(t) = t\operatorname{sh} 3t$.

V. INTÉGRATION DE L'ORIGINAL. L'intégration de l'original se ramène à la division de l'image par p, c'est-à-dire, si $f(t) \doteqdot F(p)$, alors

$$\int_0^t f(\tau)\,d\tau \doteqdot \frac{F(p)}{p}.$$

EXEMPLE 5. Trouver l'image de la fonction $\int_0^t e^\tau\,d\tau$.

SOLUTION. On a $e^t \doteqdot \frac{1}{p-1}$. D'après le théorème d'intégration de l'ori-

ginal, $\int\limits_0^t e^{\tau}\,d\tau \risingdotseq \dfrac{\frac{1}{p-1}}{p} = \dfrac{1}{p(p-1)}$.

Trouver les images des fonctions suivantes:

540. $f(t)=\int\limits_0^t \sin\tau\,d\tau$. **541.** $f(t)=\int\limits_0^t (\tau+1)\cos\omega\tau\,d\tau$.

542. $f(t)=\int\limits_0^t \tau\,\mathrm{sh}\,2\tau\,d\tau$. **543.** $f(t)=\int\limits_0^t \cos^2\omega\tau\,d\tau$.

544. $f(t)=\int\limits_0^t \mathrm{ch}\,\omega\tau\,d\tau$. **545.** $f(t)=\int\limits_0^t \tau^2 e^{-\tau}\,d\tau$.

VI. INTÉGRATION DE L'IMAGE. Si l'intégrale $\int\limits_p^{\infty} F(p)\,dp$ converge, elle est alors l'image de la fonction $\dfrac{f(t)}{t}$:

$$\frac{f(t)}{t} \risingdotseq \int\limits_p^{\infty} F(p)\,dp.$$

EXEMPLE 6. Trouver l'image de la fonction $\dfrac{\sin t}{t}$.

SOLUTION. On sait que $\sin t \risingdotseq \dfrac{1}{p^2+1}$. Donc

$$\frac{\sin t}{t} \risingdotseq \int\limits_p^{\infty} \frac{dp}{p^2+1} = \mathrm{Arctg}\,p\Big|_p^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctg}\,p = \mathrm{Arccotg}\,p$$

(pour les fonctions multiformes $\mathrm{Ln}\,z$, $\mathrm{arctg}\,z$, etc., on prend leurs branches principales pour lesquelles $\ln 1 = 0$, $\mathrm{Arctg}\,1 = \pi/4$, etc.).

Trouver les images des fonctions suivantes:

546. a) $\dfrac{e^t-1}{t}$; b) $\dfrac{1-e^{-t}}{t}$; c) $\dfrac{\sin^2 t}{t}$.

547. a) $\dfrac{1-\cos t}{t}$; b) $\dfrac{\cos t-\cos 2t}{t}$.

548. a) $\dfrac{e^t-1-t}{t}$; b) $\dfrac{e^t-e^{-t}}{t}$.

Le théorème d'intégration de l'image permet de calculer facilement cer-

taines intégrales impropres.

Soit $f(t) \risingdotseq F(p)$ et admettons que l'intégrale impropre $\int\limits_0^\infty \frac{f(t)}{t}\,dt$ converge. Alors

$$\int\limits_0^\infty \frac{f(t)}{t}\,dt = \int\limits_0^\infty F(p)\,dp, \tag{3}$$

où l'intégral du second membre peut être calculée prise sur le demi-axe positif.

EXEMPLE 7. Calculer l'intégrale $\int\limits_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt$.

SOLUTION. On a $\sin t \risingdotseq \frac{1}{p^2+1}$. D'après la formule (3),

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt = \int\limits_0^\infty \frac{dz}{z^2+1} = \operatorname{Arctg} z \Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2}.$$

Calculer les intégrales:

549. $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,dt \ (a>0,\ b>0)$.

550. $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\alpha t}\sin at}{t}\,dt \ (\alpha>0,\ a>0)$.

551. $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\alpha t}-e^{-\beta t}}{t}\sin mt\,dt \ (\alpha>0,\ \beta>0,\ m>0)$.

552. $\int\limits_0^\infty \frac{Ae^{-\alpha t}+Be^{-\beta t}+Ce^{-\gamma t}+De^{-\delta t}}{t}\,dt$

$(A+B+C+D=0,\ \ \alpha>0,\ \beta>0,\ \gamma>0,\ \delta>0)$.

553. $\int\limits_0^\infty \frac{\cos at-\cos bt}{t}\,dt \ (a>0,\ b>0)$.

554. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin at \sin bt}{t}\,dt \ (a>0,\ b>0)$.

VII. THÉORÈME DE TRANSLATION. *Si $f(t) \risingdotseq F(p)$, pour tout p_0* complexe,

$$e^{p_0 t} f(t) \risingdotseq F(p-p_0) \tag{4}$$

EXEMPLE 8. Trouver l'image de la fonction $f(t)=e^{-t}\cos 2t$.

SOLUTION. On a $\cos 2t \doteqdot \frac{p}{p^2+4}$. D'après le théorème de translation ($p_0=-1$),

$$e^{-t}\cos 2t \doteqdot \frac{p+1}{(p+1)^2+4}.$$

Trouver les images des fonctions suivantes:

555. a) $e^{2t}\sin t$; b) $e^{t}\cos nt$. 556. $e^{-t}\cdot t^3$. 557. $e^{t}\operatorname{sh} t$.
558. $te^{t}\cos t$. 559. $e^{3t}\sin^2 t$. 560. $e^{-\alpha t}\cos^2\beta t$.

VIII. THÉORÈME DE RETARDEMENT. *Si $f(t)\doteqdot F(p)$, pour tout τ positif,*

$$f(t-\tau)\doteqdot e^{-p\tau}F(p). \qquad (5)$$

L'application de ce théorème rend commode la recherche des images des fonctions qui sont données par différentes expressions analytiques dans diverses parties de leurs domaines de définition.

EXEMPLE 9. Trouver l'image de la fonction

$$f(t-1)=(t-1)^2\eta(t-1).$$

SOLUTION. Pour la fonction $f(t)=t^2\eta(t)$, on a

$$f(t)\doteqdot\frac{2}{p^3}.$$

D'après le théorème de retardement, pour la fonction $(t-1)^2\eta(t-1)$, on a

$$(t-1)^2\eta(t-1)\doteqdot e^{-p}\frac{2}{p^3}.$$

Dans l'exemple considéré, il est essentiel que l'on cherche l'image de la fonction $(t-1)^2\eta(t-1)$, c'est-à-dire d'une fonction qui est égale à zéro pour $t<1$.

Si l'on considérait la fonction $f_1(t)=(t-1)^2\eta(t)$, on aurait $f_1(t)=(t^2-2t+1)\eta(t)$ et, en vertu de la propriété de linéarité,

$$(t-1)^2\eta(t)\doteqdot\frac{2}{p^3}-\frac{2}{p^2}+\frac{1}{p}.$$

Trouver les images des fonctions:

561. $\sin(t-b)\eta(t-b)$. 562. $\cos^2(t-b)\eta(t-b)$.
563. $e^{t-2}\eta(t-2)$.

EXEMPLE 10. Trouver l'image $F(p)$ de la fonction $f(t)$ donnée par le graphique ci-dessous (fig. 34):

SOLUTION. Trouvons l'expression analytique pour la fonction $f(t)$.

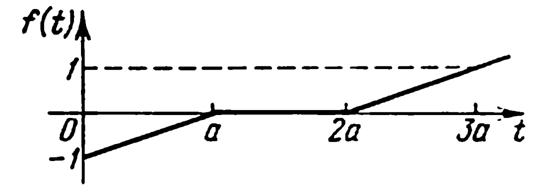


Fig. 34.

a) Pour $t\in(0, a)$, la fonction $f(t)$ est donnée par la formule

$$f(t)=\frac{t-a}{a}\eta(t). \qquad (6)$$

b) Pour $t \in (a, 2a)$, on a $f(t) = 0$.
c) Pour $t \geqslant 2a$, on obtient

$$f(t) = \frac{t-2a}{a}\eta(t-2a). \tag{7}$$

En supposant que la fonction $f(t)$ est donnée par la formule (6) pour tous les $t \geqslant 0$, voyons quelle fonction $\psi_1(t)$ faudrait-il lui ajouter pour obtenir $f(t) = 0$ pour tous les $t \geqslant a$. En imposant

$$\frac{t-a}{a} + \psi_1(t) = 0,$$

pour $t \geqslant a$, on trouve

$$\psi_1(t) = -\frac{t-a}{a}\eta(t-a).$$

Ensuite, on trouve une fonction $\psi_2(t)$ telle qu'en l'ajoutant à $f(t) = 0$ on obtient la fonction $\frac{t-2a}{a}$ pour tous les $t \geqslant 2a$. Cela aboutit à

$$0 + \psi_2(t) = \frac{t-2a}{a},$$

d'où

$$\psi_2(t) = \frac{t-2a}{a}\eta(t-2a).$$

De cette façon, pour tous les $t \geqslant 0$, on obtient

$$f(t) = \frac{t-a}{a}\eta(t) - \frac{t-a}{a}\eta(t-a) + \frac{t-2a}{a}\eta(t-2a).$$

A l'aide de la propriété de linéarité et du théorème de retardement, on trouve l'image cherchée $F(p)$ de la fonction donnée $f(t)$:

$$F(p) = \frac{1}{ap^2} - \frac{1}{p} - \frac{1}{ap^2}e^{-ap} - \frac{1}{ap^2}e^{-2ap}.$$

EXEMPLE 11. Trouver l'image $F(p)$ de la fonction $f(t)$ donnée par le graphique ci-dessous (fig. 35):

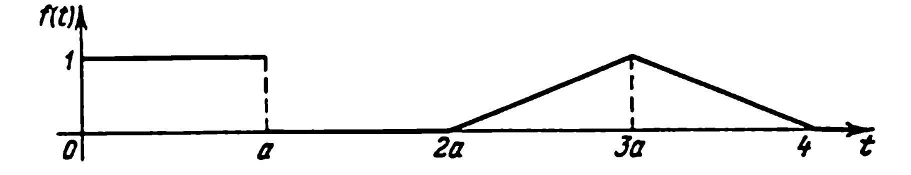


Fig. 35.

SOLUTION. Trouvons l'expression analytique pour la fonction $f(t)$.
a) $f(t) = 1$ pour $t \in (0, a)$,
b) $f(t) = 0$ pour $t \in (a, 2a)$,

c) $f(t) = \frac{t-2a}{a}$ pour $t \in (2a, 3a)$,

d) $f(t) = 1 - \frac{t-3a}{a}$ pour $t \in (3a, 4a)$,

e) $f(t) = 0$ pour $t \geqslant 4a$.

Pour $t \in (0, a)$, on a $f(t) = 1$.

Ensuite, on trouve une fonction $\psi_1(t)$ telle que la relation $1 + \psi_1(t) = 0$ pour $t \geqslant a$ reste valable, d'où $\psi_1(t) = -1 \cdot \eta(t-a)$.

On trouve maintenant une fonction $\psi_2(t)$ telle que l'égalité $0 + \psi_2(t) = \frac{t-2a}{a}$ soit vérifiée pour tous les $t > 2a$. D'où

$$\psi_2(t) = \frac{t-2a}{a}\,\eta(t-2a).$$

D'une façon analogue, on trouve les fonctions

$$\psi_3(t) = -2\,\frac{t-3a}{a}\,\eta(t-3a), \qquad \psi_4(t) = \frac{t-4a}{a}\,\eta(t-4a).$$

Ainsi,

$$f(t) = \eta(t) - \eta(t-a) + \frac{t-2a}{a}\,\eta(t-2a) - \\ -2\,\frac{t-3a}{a}\,\eta(t-3a) + \frac{t-4a}{a}\,\eta(t-4a).$$

A l'aide de la propriété de linéarité et du théorème de retardement, on obtient l'image

$$F(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p}\,e^{-ap} + \frac{1}{ap^2}\,e^{-2ap} - \frac{2}{ap^2}\,e^{-3ap} + \frac{1}{ap^2}\,e^{-4ap}.$$

EXEMPLE 12. Trouver l'image de la fonction

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 1, \\ t^2 & \text{pour } 1 < t < 2. \\ 0 & \text{pour } t > 2. \end{cases}$$

SOLUTION. Exprimons $f(t)$ par les puissances des différences $t-1$ et $t-2$.

On a

$$t^2 = [(t-1)+1]^2 = (t-1)^2 + 2(t-1) + 1,$$
$$t^2 = [(t-2)+2]^2 = (t-2)^2 + 4(t-2) + 4.$$

Donc, la fonction donnée $f(t)$ va s'écrire sous la forme

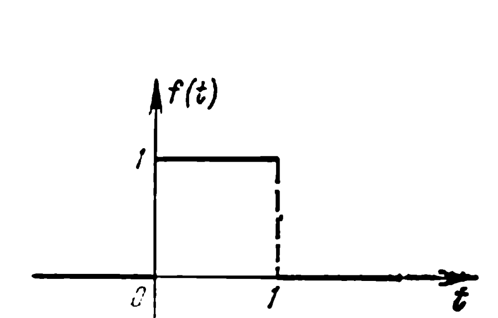
$$f(t) = [(t-1)^2 + 2(t-1) + 1]\,\eta(t-1) - [(t-2)^2 + 4(t-2) + 4]\,\eta(t-2).$$

En passant aux images, on obtient

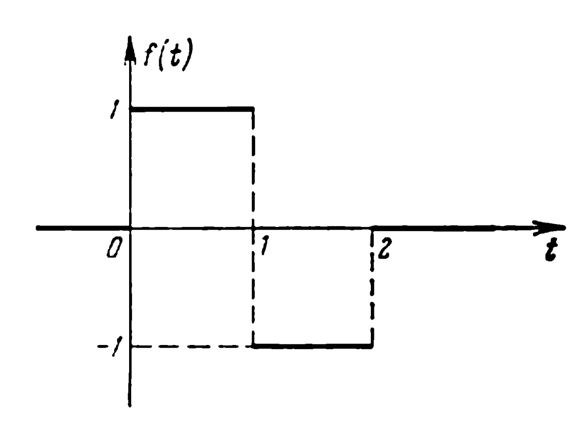
$$f(t) \risingdotseq F(p) = \left(\frac{2}{p^3} + \frac{2}{p^2} + \frac{1}{p}\right) e^{-p} - \left(\frac{2}{p^3} + \frac{4}{p^2} + \frac{4}{p}\right) e^{-2p}.$$

Trouver les images des fonctions données par les graphiques ci-après:

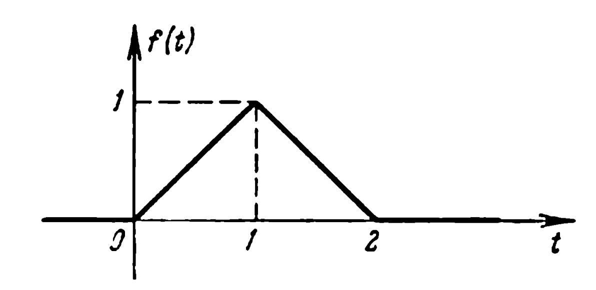
564.



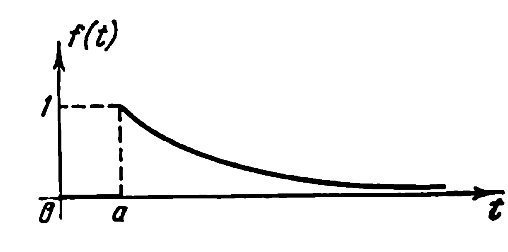
565.



566.

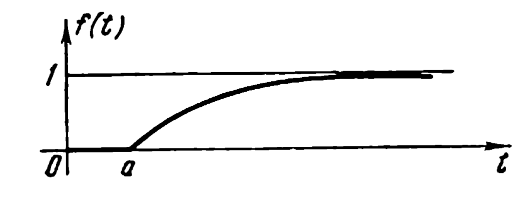


567.



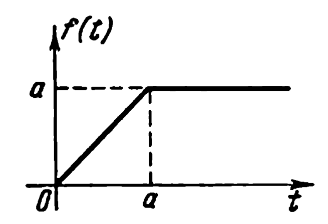
$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant a, \\ e^{-b(t-a)} & \text{pour} \quad t > a. \end{cases}$$

568.

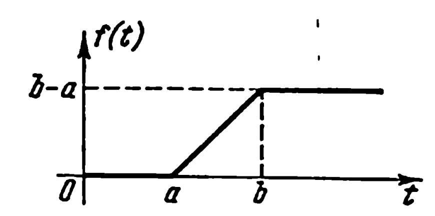


$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant a, \\ 1 - e^{-b(t-a)} & \text{pour} \quad t > a. \end{cases}$$

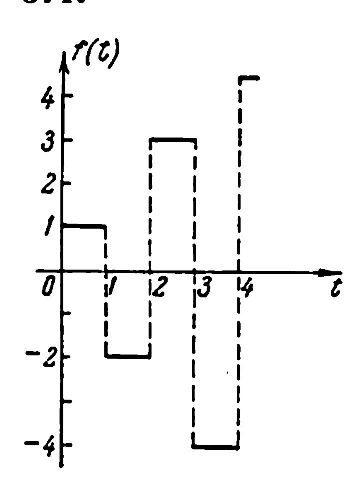
569.



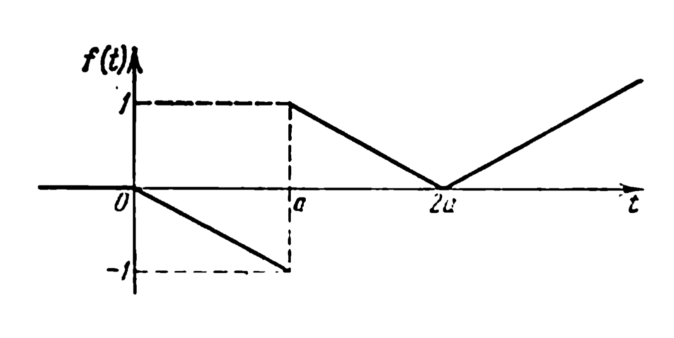
570.



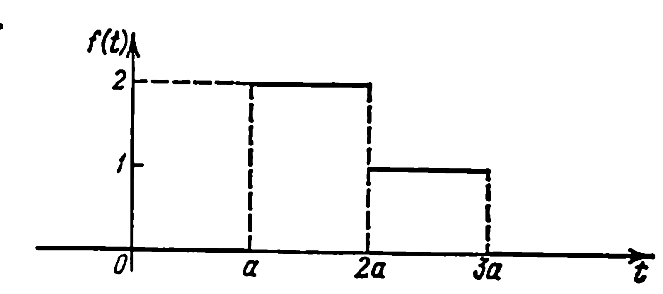
571.



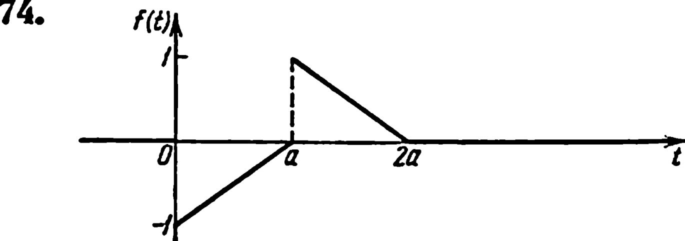
572.



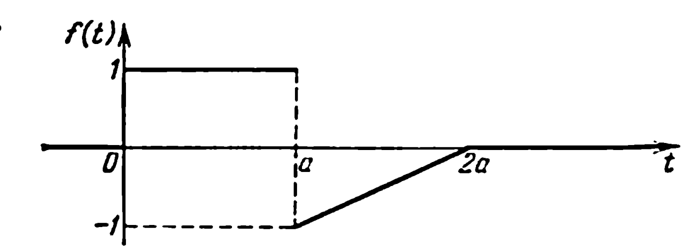
573.



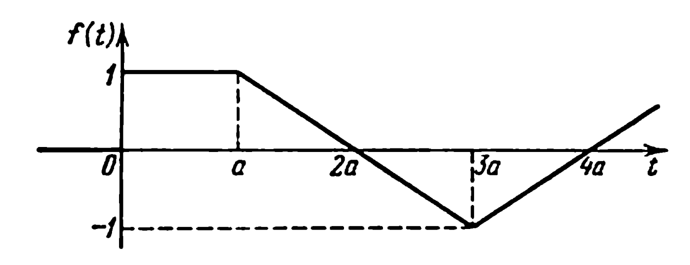
574.



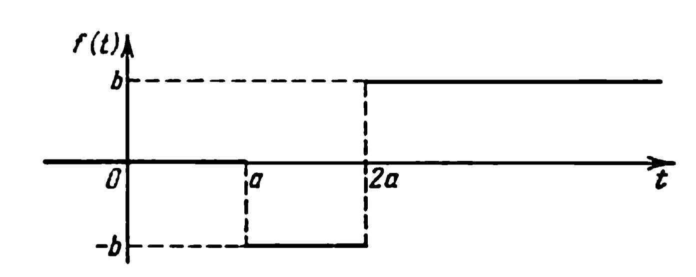
575.



576.



577.



578. Admettons qu'une fonction périodique $f(t)$ de période T soit un original. Montrer que son image $F(p)$ par la transformation de Laplace est donnée par la formule

$$F(p) = \frac{1}{1-e^{-pT}} \int_0^T e^{-pt} f(t)\, dt$$

et qu'elle est définie dans le demi-plan $\operatorname{Re} p = s > 0$.

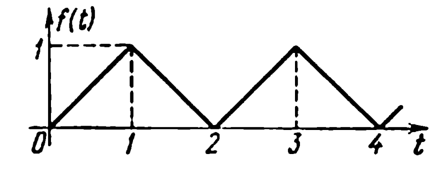


Fig. 36.

EXEMPLE 13. Trouver l'image de la fonction périodique $f(t)$ donnée par le graphique ci-contre (fig. 36).

SOLUTION. On trouve l'image d'après la formule

$$F(p)=\frac{1}{1-e^{-pT}}\int_0^T e^{-pt}f(t)\,dt, \tag{8}$$

où $f(t)$ est une fonction périodique de période T, $\operatorname{Re} p = s > 0$. En substituant dans (8) l'expression

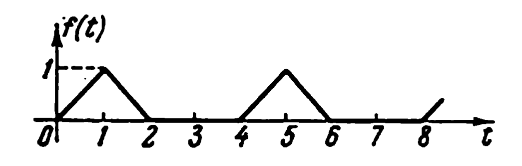
$$f(t)=\begin{cases} t & \text{pour } 0\leqslant t\leqslant 1,\\ 2-t & \text{pour } 1< t\leqslant 2,\end{cases}$$

et compte tenu du fait que $T = 2$, on obtient

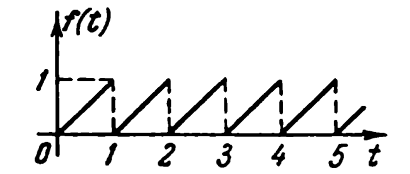
$$F(p)=\frac{1}{1-e^{-2p}}\left[\int_0^1 te^{-pt}dt+\int_1^2(2-t)e^{-pt}\,dt\right]=\frac{1-e^{-p}}{p^2(1+e^{-p})}.$$

Trouver les images des fonctions périodiques suivantes:

579.

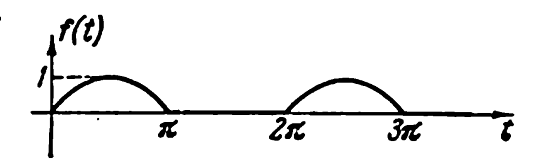


580.



581. $f(t) = |\sin t|$. 582. $f(t) = |\cos t|$.

583.



$$f(t)=\begin{cases}\sin t & \text{pour} \quad 2k\pi<t<(2k+1)\pi,\\ 0 & \text{pour} \quad (2k+1)\pi<t<(2k+2)\pi, \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).\end{cases}$$

584. Montrer que si $f(t) \doteqdot F(p)$, alors

$$f(t)\,\eta(t-a)\doteqdot F(p)-\int_0^a f(t)\,e^{-pt}\,dt.$$

L'application des méthodes du calcul opérationnel est liée parfois à l'utilisation des ainsi appelées fonctions généralisées *) qui jouent un rôle important dans les mathématiques modernes.

Parmi les fonctions généralisées il faut noter la fonction de Dirac $\delta(t)$

---

*) La définition stricte des fonctions généralisées peut être trouvée, par exemple, dans l'ouvrage de I. Guelfand et G. Chilov « Fonctions généralisées et opérations sur elles » (Moscou, Physmathguiz, 1959).

qui est définie de la façon suivante:

$$1)\ \delta(t)=\begin{cases}0, & \text{si } t\neq 0,\\ \infty, & \text{si } t=0,\end{cases}\qquad 2)\ \int_{\alpha}^{\beta}\delta(t)\,f(t)\,dt=f(0),$$

où (α, β) est un intervalle quelconque contenant le point $t = 0$, $f(t)$ étant une fonction continue au point $t = 0$.

D'une façon analogue, on définit la fonction $\delta(t-\tau)$ concentrée au point $t = \tau$.

La théorie des fonctions généralisées considère $\delta(t)$ en tant que dérivée de la fonction unité $\eta(t)=\begin{cases}1, & t>0,\\ 0, & t<0,\end{cases}$

$$\eta'(t)=\delta(t). \tag{9}$$

De la même façon, pour tout τ,

$$\eta'(t-\tau)=\delta(t-\tau).$$

Remarquons que la dérivée de la fonction $\eta(t)$ au sens habituel s'annule pour tous les $t\neq 0$, alors que pour $t = 0$ elle n'existe pas.

Les formules ci-dessous sont valables

$$\left.\begin{aligned}&\delta(t) \risingdotseq 1;\\ &\delta^{(m)}(t) \risingdotseq p^m,\ m \text{ étant un entier} \geqslant 0;\\ &\delta(t-\tau) \risingdotseq e^{-p\tau}\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Examinons la fonction $f(t)$ qui présente des discontinuités de première espèce aux points t_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ avec les sauts

$$h_k = f(t_k+0) - f(t_k-0) \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Soit $f(t)$ une fonction continûment différentiable dans les intervalles (t_k, t_{k+1}) $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ et pour $t<t_1$ et $t>t_n$. Alors

$$f'(t)=f_1'(t)+\sum_{k=1}^{n} h_k\delta(t-t_k), \tag{11}$$

où $f_1(t) = f(t) - \sum\limits_{k=1}^{n} h_k\eta(t-t_k)$ est une fonction « close ». De cette manière, la dérivée de la fonction discontinue $f(t)$ est composée de sa dérivée habituelle $f_1'(t)$ (dans les intervalles où $f(t)$ est lisse) et de la somme des fonctions δ aux points de discontinuité avec les sauts correspondants en qualité de coefficients. Cette règle est importante, car elle assure l'application correcte des théorèmes du calcul opérationnel aux fonctions discontinues.

Considérons, par exemple, la fonction $f(t)$ définie comme suit:

$$f(t) = \eta(t) - 2\eta(t-1) + \eta(t-2).$$

En appliquant la formule (11), on trouve

$$f'(t) = \delta(t) - 2\delta(t-1) + \delta(t-2),$$

d'où, conformément aux relations (10),

$$f'(t) \risingdotseq 1-2e^{-p}+e^{-2p}.$$

Ensuite,

$$f(t) \doteq \frac{1}{p} - \frac{2}{p} e^{-p} + \frac{1}{p} e^{-2p},$$

ce qui revient de nouveau à

$$f(t) = \eta(t) - 2\eta(t-1) + \eta(t-2).$$

Un raisonnement moins rigoureux qui ne tient pas compte de la formule (11) aboutirait au résultat suivant. Au sens habituel, la dérivée de $f(t)$ est égale à zéro partout, sauf les points $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ où elle n'existe pas. Mais, dans ce cas, l'intégrale de Laplace de $f'(t)$ doit également être nulle, ce qui donne une image de $f(t)$ égale à zéro, or ceci est évidemment faux.

585. Résoudre le problème n° 580 en trouvant d'abord l'image de la dérivée de la fonction $f(t)$, ensuite, l'image de la fonction $f_1(t)$ elle-même.

586. Soient a et b deux nombres positifs et soit $f(t) \doteq F(p)$. Montrer que la fonction

$$g(t) = \begin{cases} f(at-b), & t > \frac{b}{a}, \\ 0, & t < \frac{b}{a}, \end{cases}$$

a pour image $\frac{1}{a} e^{-\frac{b}{a}p} F\left(\frac{p}{a}\right)$ (théorèmes d'homothétie et de retardement cumulés).

587. Trouver les images des fonctions:

a) $f(t) = \begin{cases} \sin\left(2t - \frac{\pi}{4}\right), & t > \frac{\pi}{8}. \\ 0, & t < \frac{\pi}{8}; \end{cases}$

b) $f(t) = \begin{cases} \cos\left(3t - \frac{\pi}{6}\right), & t > \frac{\pi}{18}, \\ 0, & t < \frac{\pi}{18}; \end{cases}$ c) $f(t) = \begin{cases} \operatorname{sh}(3t-6), & t > 2, \\ 0, & t < 2. \end{cases}$

588. Trouver l'image de la fonction de distribution des masses m_k aux points $t = k$

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} m_k \delta(t-k).$$

IX. THÉORÈME DE MULTIPLICATION (THÉORÈME DE CONVOLUTION). Le produit de deux images $F(p)$ et $\Phi(p)$ est également une image, de plus

$$F(p)\Phi(p) \doteq \int_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)\,d\tau. \qquad (12)$$

L'intégrale figurant au second membre de la relation (12) est appelée *convolution* des fonctions $f(t)$ et $\varphi(t)$ et est désignée par le symbole $f(t) * \varphi(t)$.

EXEMPLE 14. Trouver l'image de la fonction

$$\psi(t)=\int_0^t (t-\tau)\, e^{\tau}\, d\tau.$$

SOLUTION. La fonction $\psi(t)$ est la convolution des fonctions $f(t)=t$ et $\varphi(t)=e^t$. D'après le théorème de multiplication,

$$\psi(t) \doteqdot \Psi(p)=F(p)\,\Phi(p)=\frac{1}{p^2}\cdot\frac{1}{p-1}=\frac{1}{p^2(p-1)}.$$

EXEMPLE 15. Soit $F_1(p)=\frac{1}{p^x}$, $F_2(p)=\frac{1}{p^y}$ ($x>0$, $y>0$ sont des nombres réels). Alors

$$f_1(t)=\frac{t^{x-1}}{\Gamma(x)}, \qquad f_2(t)=\frac{t^{y-1}}{\Gamma(y)}.$$

D'après le théorème de multiplication,

$$F_1(p)\,F_2(p)=\frac{1}{p^{x+y}} \doteqdot \frac{1}{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}\int_0^t (t-\tau)^{y-1}\,\tau^{x-1}\,d\tau. \tag{13}$$

D'autre part,

$$F_1(p)\,F_2(p)=\frac{1}{p^{x+y}} \doteqdot \frac{t^{x+y-1}}{\Gamma(x+y)}. \tag{14}$$

Des relations (13) et (14) on tire

$$\frac{t^{x+y-1}}{\Gamma(x+y)}=\frac{1}{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}\int_0^t (t-\tau)^{y-1}\,\tau^{x-1}\,d\tau.$$

En posant $\tau=\lambda t$, la dernière égalité nous donne

$$\frac{t^{x+y-1}}{\Gamma(x+y)}=\frac{t^{x+y-1}}{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}\int_0^1 \lambda^{x-1}\,(1-\lambda)^{y-1}\,d\lambda.$$

L'intégrale figurant au second membre est la fonction eulérienne $\mathrm{B}(x, y)$. On arrive ainsi à une formule remarquable qui relie entre elles les fonctions B et Γ d'Euler

$$\mathrm{B}(x, y)=\frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

CONVOLUTION RÉITÉRATIVE. Soient données trois fonctions $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$. Alors

$$F_1(p)\,F_2(p) \doteqdot \int_0^t f_2(\tau_1)\, f_1(t-\tau_1)\, d\tau_1.$$

Ensuite

$$(F_1(p)\cdot F_2(p))\cdot F_3(p) \risingdotseq \int_0^t \left\{ \int_0^{t-\tau_2} f_2(\tau_1) f_1(t-\tau_1-\tau_2)\,d\tau_1 \right\} f_3(\tau_2)\,d\tau_2 =$$

$$= \int_0^t f_3(\tau_2)\,d\tau_2 \int_0^{t-\tau_2} f_2(\tau_1) f_1(t-\tau_1-\tau_2)\,d\tau_1.$$

Soit

$$F_1(p) = \frac{1}{p} \risingdotseq \eta(t).$$

Alors

$$\frac{F_2(p)\,F_3(p)}{p} \risingdotseq \int_0^t f_3(\tau_2)\,d\tau_2 \int_0^{t-\tau_2} f_2(\tau_1)\,\eta(t-\tau_1-\tau_2)\,d\tau_1.$$

De la définition de la fonction $\eta(t)$ il découle que l'intégration est pratiquement réalisée dans le domaine $t > \tau_1 + \tau_2$, où $\eta(t - \tau_1 - \tau_2) = 1$. Ainsi,

$$\frac{F_2(p)\,F_3(p)}{p} \risingdotseq \iint\limits_{\tau_1+\tau_2<t} f_2(\tau_1)\,f_3(\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2.$$

Mettons à profit le résultat obtenu pour trouver le volume d'une sphère à n dimensions. Introduisons dans l'espace à n dimensions le système de coordonnées cartésiennes orthogonales $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Le volume $V_n(R)$ de l'hypersphère de rayon R est donné par l'égalité

$$V_n(R) = \iint\limits_{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\leqslant R^2} \ldots \int dx_1\,dx_2\ldots dx_n.$$

En vertu de la symétrie de la sphère par rapport à son centre,

$$V_n(R) = 2^n \int_0^{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2<R^2} dx_1 \int_0 dx_2 \ldots \int_0 dx_n.$$

Effectuons la substitution $x_k = \sqrt{\tau_k}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Alors

$$V_n(R) = \iint\limits_{\tau_1+\tau_2+\ldots+\tau_n<R^2} \ldots \int \frac{d\tau_1 d\tau_2 \ldots d\tau_n}{\sqrt{\tau_1}\,\sqrt{\tau_2}\ldots\sqrt{\tau_n}}.$$

C'est la convolution réitérative de n fonctions identiques

$$f_k(t) = \frac{\eta(t)}{\sqrt{t}} \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \quad \text{où} \quad t = R^2.$$

L'image de chacune de ces fonctions s'écrit

$$f_k(t) \risingdotseq \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}} \quad \text{(cf. problème n° 515).}$$

Pour cette raison,

$$V_n(\sqrt{t}) \doteqdot \frac{(\sqrt{\pi})^n}{p^{1+n/2}} = \frac{\pi^{n/2}}{p^{1+n/2}},$$

d'où

$$V_n(\sqrt{t}) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)} t^{n/2} = \frac{\pi^{n/2}R^n}{\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)} = V_n(R).$$

Donc,

$$V_n(R) = \frac{\pi^{n/2}R^n}{\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)}.$$

En particulier, pour $n=2$, on trouve

$$V_2(R) = \frac{\pi R^2}{\Gamma(2)} = \pi R^2.$$

EXEMPLE 16. En utilisant le théorème de multiplication, démontrer la formule de Cauchy

$$\underbrace{\int_0^x \int_0^x \cdots \int_0^x}_{n} f(x)\,dx\,dx \ldots dx = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} f(t)\,dt.$$

DÉMONSTRATION. Supposons que la fonction $f(x)$ est un original qui a comme image $F(p)$. Alors

$$\int_0^x f(x)\,dx \doteqdot \frac{1}{p} F(p).$$

En intégrant n fois la fonction $f(x)$ dans les limites de 0 à x, on obtient

$$\underbrace{\int_0^x \int_0^x \cdots \int_0^x}_{n} f(x)\,dx\,dx \ldots dx \doteqdot \frac{1}{p^n} F(p). \qquad \text{(a)}$$

Etant donné que

$$F(p) \doteqdot f(x), \qquad \frac{1}{p^n} \doteqdot \frac{x^{n-1}}{(n-1)!},$$

en appliquant le théorème de multiplication (de convolution), on aboutit à

$$\frac{1}{p^n} F(p) = F_0(p) \cdot \frac{1}{p^n} \doteqdot \int_0^x f(t) \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt$$

ou

$$\frac{1}{p^n} F(p) \doteqdot \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} f(t)\,dt. \qquad \text{(b)}$$

La formule de Cauchy est déduite des relations (a) et (b).

Trouver les images des fonctions suivantes:

589. $\int_0^t e^{t-\tau}\sin\tau\,d\tau$.

590. $\int_0^t \cos(t-\tau)\,e^{2\tau}\,d\tau$.

591. $\int_0^t (t-\tau)^2 \operatorname{ch}\tau\,d\tau$.

592. $\int_0^t (t-\tau)^n f(\tau)\,d\tau$.

593. $\int_0^t e^{2(\tau-t)}\tau^2\,d\tau$.

PREMIER THÉORÈME DE DÉVELOPPEMENT. *Si $F(p)$ est une fonction analytique dans le voisinage du point à l'infini et est égale à zéro à ce point, et si elle admet dans le voisinage du point à l'infini le développement en série de Laurent $F(p)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{p^k}$, alors la fonction*

$$f(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{(k-1)!}t^{k-1}$$

est l'original de $F(p)$, de plus, cette série converge pour tous les t.

EXEMPLE 17. Examinons la fonction $F(p)=\frac{p}{p^2+1}$. Elle est analytique dans le voisinage du point à l'infini et son développement en série de Laurent est de la forme

$$F(p)=\frac{p}{p^2\left(1+\frac{1}{p^2}\right)}=\frac{1}{p\left(1+\frac{1}{p^2}\right)}=$$

$$=\frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^4}-\ldots+(-1)^n\frac{1}{p^{2n}}+\ldots\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{p^{2n+1}}.$$

Alors

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!}=\cos t,$$

ce qui coïncide avec le résultat connu.

EXEMPLE 18. Trouver l'image de la fonction $f(t)=J_0(t)$, où $J_0(t)$ est la fonction de Bessel d'ordre zéro.

SOLUTION. On sait que

$$J_0(t)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{t^{2k}}{(k!)^2 2^{2k}}.$$

Considérons la fonction $F(p) = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$. C'est une fonction uniforme dans le domaine $|p| > 1$, analytique dans le voisinage du point à l'infini et qui s'égale à zéro à ce point. Trouvons le développement en série de Laurent de cette fonction dans le voisinage du point à l'infini à l'aide de la formule de développement du binôme:

$$F(p) = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{1}{p}\left(1+\frac{1}{p^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k)!}{(k!)^2 2^{2k} p^{2k+1}}.$$

En vertu du premier théorème de développement, la fonction $F(p)$ a comme original la fonction

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(k!)^2 2^{2k}} = J_0(t).$$

De cette façon,

$$J_0(t) \risingdotseq \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}.$$

EXEMPLE 19. Déduire la relation de récurrence

$$J_{n+1}(t) = \frac{2n}{t} J_n(t) - J_{n-1}(t).$$

SOLUTION. On sait (cf. problème n° 596) que

$$J_n(t) \risingdotseq \frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^n}{\sqrt{p^2+1}}.$$

A l'aide du théorème d'intégration de l'image, on obtient

$$\frac{J_n(t)}{t} \risingdotseq \int_p^{\infty} \frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^n}{\sqrt{p^2+1}}\, dp.$$

Posons $\sqrt{p^2+1}-p = v$. Alors

$$\int \frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^n}{\sqrt{p^2+1}}\, dp = -\int v^{n-1}\, dv = -\frac{v^n}{n} + c,$$

de façon que

$$\frac{J_n(t)}{t} \risingdotseq -\frac{1}{n}\left[(\sqrt{p^2+1}-p)^n\right]\Big|_{p=p}^{p=\infty} = \frac{1}{n}(\sqrt{p^2+1}-p)^n. \quad (15)$$

D'autre part, des expressions

$$J_{n-1}(t) \risingdotseq \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}(\sqrt{p^2+1}-p)^{n-1},$$

$$J_{n+1}(t) \risingdotseq \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}(\sqrt{p^2+1}-p)^{n+1}$$

on tire

$$J_{n-1}(t)+J_{n+1}(t) \risingdotseq 2(\sqrt{p^2+1}-p)^n. \tag{16}$$

Les relations (15) et (16) permettent d'établir

$$J_{n-1}(t)-\frac{2n}{t}J_n(t)+J_{n+1}(t)=0.$$

594. Montrer que

$$J_n'(t)=\frac{J_{n-1}(t)-J_{n+1}(t)}{2} \quad (n=1,\ 2,\ \ldots).$$

595. Trouver l'image de la fonction $f(t)=J_1(t)$.

596. Montrer que $J_n(t) \risingdotseq \frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^n}{\sqrt{p^2+1}}$.

597. Montrer que

$$t^{\frac{n}{2}}J_n(2\sqrt{t}) \risingdotseq \frac{1}{p^{n+1}}e^{-1/p} \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

598. La fonction de Bessel de première espèce d'argument purement imaginaire $I_n(t)$ est exprimée par la fonction de Bessel $J_n(t)$ à l'aide de la relation $I_n(t)=(i)^{-n}J_n(it)$.

Montrer que

$$I_n(t) \risingdotseq \frac{(p-\sqrt{p^2-1})^n}{\sqrt{p^2-1}}.$$

599. Les polynômes de Laguerre sont définis par la formule

$$L_n(t)=\frac{e^t}{n!}\frac{d^n}{dt^n}(t^ne^{-t}) \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Montrer que

$$L_n(t) \risingdotseq \frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)^n \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

600. Trouver l'image de la fonction $f(t)=\ln t$.

601. Montrer que $\operatorname{erf}(\sqrt{t}) \risingdotseq \frac{1}{p\sqrt{p+1}}$, où

$$\operatorname{erf}(t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-u^2}\,du.$$

On demande de trouver la somme de la série fonctionnelle $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(t)$, où $\varphi_n(t)$ sont des originaux.

En substituant aux fonctions $\varphi_n(t)$ leurs images, on aboutit à une série constituée d'images dont la sommation est parfois beaucoup plus simple à ef-

fectuer que celle de la série initiale. En passant de la somme trouvée à l'original, on aboutit à la somme de la série donnée.

EXEMPLE 20. Pour le polynôme de Laguerre, on a

$$L_n(t) \risingdotseq \frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)^n.$$

Ainsi,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n L_n(t) \risingdotseq \frac{1}{p}\left[1-\left(1-\frac{1}{p}\right)+\left(1-\frac{1}{p}\right)^2-\cdots\right]=$$

$$=\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{1+1-\frac{1}{p}}=\frac{1}{2p-1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p-\frac{1}{2}}\risingdotseq\frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}}.$$

De cette façon,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n L_n(t)=\frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}}.$$

602. Montrer que $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n L_{2n}(2t)=\frac{1}{2}e^t(\sin t+\cos t)$.

603. Montrer que $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_n(t)}{n!}=eJ_0(2\sqrt{t})$.

604. Montrer que $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n J_{2n+1}(t)=\frac{1}{2}\sin t$.

605. Montrer que $J_0(t)+2\sum_{n=1}^{\infty}J_{2n}(t)=1$, où $J_k(t)$ est la fonction de Bessel d'ordre k.

606. Montrer que $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_n(t)}{2^{n+1}}=e^{-t}$, $0<t<+\infty$.

EXEMPLE 21. Calculer l'intégrale

$$f(t)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos tu}{a^2+u^2}\,du,\quad t>0.$$

SOLUTION. D'après le théorème d'homothétie, pour $\cos tu$ considéré en tant qu'une fonction d'argument t, on a

$$\cos tu \risingdotseq \frac{p}{p^2+u^2}.$$

Pour cette raison,

$$f(t) \doteqdot \int_0^{+\infty} \frac{p\,du}{(p^2+u^2)(a^2+u^2)}.$$

La fonction sous le signe d'intégration étant une fonction d'argument u, on peut la mettre sous la forme

$$\frac{p}{(p^2+u^2)(a^2+u^2)} = -\frac{p}{p^2-a^2}\cdot\frac{1}{p^2+u^2}+\frac{p}{p^2-a^2}\cdot\frac{1}{a^2+u^2}.$$

Par conséquent,

$$f(t) \doteqdot \left(-\frac{1}{p^2-a^2}\operatorname{arctg}\frac{u}{p}+\frac{p}{p^2-a^2}\cdot\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a}\right)\Bigg|_{u=0}^{u=+\infty} = \frac{\pi}{2a}\,\frac{1}{p+a}.$$

Lorsque l'on passe aux originaux, on obtient finalement

$$f(t) = \frac{\pi}{2a}\,e^{-at}.$$

Calculer les intégrales:

607. a) $f(t) = \int_0^{\infty} \frac{u\sin tu}{1+u^2}\,du, \quad t>0;$

b) $f(t) = \int_0^{\infty} \frac{\sin tu\cdot\cos u}{u}\,du, \quad t>0.$

608. Trouver les valeurs de la fonction $f(t)$ et de ses dérivées première et seconde pour $t\to+0$ si $f(t) \doteqdot \frac{p+1}{p(p^2+p+1)}$ et si $f'(t)$, $f''(t)$, $f'''(t)$ sont des originaux.

RECHERCHE DES ORIGINAUX D'APRÈS LEURS IMAGES. Pour trouver l'original $f(t)$ en partant d'une image $F(p)$ connue, on utilise les techniques suivantes:

I. Si $F(p) = \frac{Q(p)}{R(p)}$ est une fraction propre rationnelle, on la décompose d'abord en une somme de fractions simples pour trouver ensuite l'original de chacune de ces dernières grâce à l'application des propriétés I à IX de la transformation de Laplace.

EXEMPLE 22. Trouver l'original de la fonction $F(p) = \frac{1}{p(p-1)(p^2+4)}$.

SOLUTION. On décompose $F(p)$ en une somme de fractions simples:

$$\frac{1}{p(p-1)(p^2+4)} = \frac{A}{p}+\frac{B}{p-1}+\frac{Cp+D}{p^2+4}.$$

On détermine les coefficients A, B, C, D et l'on obtient

$$F(p) = -\frac{1}{4}\,\frac{1}{p}+\frac{1}{5}\,\frac{1}{p-1}+\frac{1}{20}\,\frac{p}{p^2+4}-\frac{1}{5}\,\frac{1}{p^2+4}. \qquad (17)$$

Les originaux de chacune des fractions simples figurant au second membre de

(17) sont faciles à trouver. En utilisant la propriété de linéarité, on a

$$f(t)=-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\,e^{t}+\frac{1}{20}\cos 2t-\frac{1}{10}\sin 2t.$$

EXEMPLE 23. $F(p)=\dfrac{1}{(p^2+1)^2}$. Trouver l'original $f(t)$.

SOLUTION. Dans le cas examiné, $F(p)$ se présente sous la forme d'une fraction simple. Pour trouver son original, faisons appel au théorème de multiplication et à la relation

$$\frac{1}{p^2+1}\fallingdotseq \sin t.$$

On a

$$F(p)=\frac{1}{(p^2+1)^2}=\frac{1}{p^2+1}\cdot\frac{1}{p^2+1}\fallingdotseq$$

$$\fallingdotseq\int_0^t \sin(t-\tau)\sin\tau\,d\tau=\frac{1}{2}\int_0^t[\cos t-\cos(2\tau-1)]\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{2}\,t\cos t-\frac{1}{4}\sin(2\tau-t)\Big|_{\tau=0}^{\tau=t}=\frac{1}{2}\,t\cos t-\frac{1}{2}\sin t.$$

EXEMPLE 24. $F(p)=\dfrac{e^{-p}}{p+1}$. Trouver l'original $f(t)$.

SOLUTION. La présence du facteur e^{-p} implique l'utilisation du théorème de retardement. Ici $\tau=1$, $\dfrac{1}{p+1}\fallingdotseq e^{-t}$ et, par conséquent,

$$\frac{e^{-p}}{p+1}\fallingdotseq e^{-(t-1)}\,\eta(t-1).$$

II. On remonte à l'original à l'aide du second théorème de développement en vertu duquel, certaines conditions étant satisfaites par $F(p)$, l'original de cette dernière est représenté par la fonction

$$f(t)=\sum_{(p_k)}\operatorname{Res}\,[F(p)\,e^{pt}],$$

où la somme des résidus inclut tous les points singuliers p_k de la fonction $F(p)$.

En particulier, si $F(p)=\dfrac{Q(p)}{R(p)}$ est une fraction propre rationnelle, elle a pour original la fonction

$$f(t)=\sum_{k=1}^{l}\frac{1}{(n_k-1)!}\lim_{p\to p_k}\frac{d^{n_k-1}}{dp^{n_k-1}}\{F(p)\,e^{pt}\,(p-p_k)^{n_k}\},\qquad(18)$$

où p_k sont les pôles d'ordre de multiplicité n_k de $F(p)$, la somme (18) étant effectuée pour tous les pôles de $F(p)$.

Si tous les pôles de $F(p)$ sont des pôles simples, la formule (18) peut être réduite à la forme

$$f(t)=\sum_{k=1}^{l}\frac{Q(p_k)}{R'(p_k)}e^{p_k t}.$$

EXEMPLE 25. $F(p)=\frac{p}{(p^2-1)^2}$. Trouver l'original $f(t)$.

SOLUTION. La fonction $F(p)$ possède les pôles $p_1=1$, $p_2=-1$ d'ordre 2. D'après la formule (18),

$$f(t)=\lim_{p\to 1}\left[\frac{pe^{pt}}{(p+1)^2}\right]_p'+\lim_{p\to -1}\left[\frac{pe^{pt}}{(p-1)^2}\right]_p'=\frac{1}{2}t\,\mathrm{sh}\,t.$$

Trouver les originaux correspondant aux images ci-après et construire leurs graphiques:

609. $F(p)=\frac{2e^{-p}}{p^3}$. 610. $F(p)=\frac{e^{-2p}}{p^2}$.

611. $F(p)=\frac{e^{-2p}}{p-1}$. 612. $F(p)=\frac{e^{-3p}}{p+3}$.

Trouver les originaux en partant des images suivantes:

613. $F(p)=\frac{1}{p^2+4p+5}$. 614. $F(p)=\frac{1}{p^2+4p+3}$.

615. $F(p)=\frac{p}{(p+1)^2}$. 616. $F(p)=\frac{p}{(p^2+1)^2}$.

617. $F(p)=\frac{1}{p+2p^2+p^3}$. 618. $F(p)=\frac{1}{7-p+p^2}$.

619. $F(p)=\frac{2p^3+p^2+2p+2}{p^5+2p^4+2p^3}$. 620. $F(p)=\frac{1}{p^2(p^2+1)}$.

621. $F(p)=\frac{p+2}{(p+1)(p-2)(p^2+4)}$.

622. $F(p)=\frac{n!}{p(p+1)(p+2)\dots(p+n)}$.

623. $F(p)=\frac{1}{p^4+2p^3+3p^2+2p+1}$. 624. $F(p)=\frac{p^2+2p-1}{p^3+3p^2+3p+1}$.

625. $F(p)=\frac{p}{p^3+1}$. 626. $F(p)=\frac{2p+3}{p^3+4p^2+5p}$.

627. $F(p)=\frac{1}{(p-1)^2(p+2)}$. 628. $F(p)=\frac{p^2+2p-1}{p^3-2p^2+2p-1}$.

629. $F(p)=\frac{3p^2}{(p^3-1)^2}$. 630. $F(p)=\frac{e^{-p}}{p^2-2p+5}+\frac{pe^{-2p}}{p^2+9}$.

631. $F(p)=\frac{e^{-3p}}{(p+1)^2}$. 632. $F(p)=\frac{e^{-p}}{p(p-1)}$.

633. $F(p)=\frac{1}{p^2+1}(e^{-2p}+2e^{-3p}+3e^{-4p})$.

634. $F(p)=\frac{e^{-p}}{p^2-1}+\frac{pe^{-2p}}{p^2-4}$. **635.** $F(p)=\frac{e^{-p/2}}{p(p+1)(p^2+4)}$.

636. $F(p)=\frac{e^{-p}}{p^2}+\frac{2e^{-2p}}{p^3}+\frac{6e^{-3p}}{p^4}$. **637.** $F(p)=\frac{e^{-p/3}}{p(p^2+1)}$.

THÉORÈME D'EFROS. Soit $f(t) \doteqdot F(p)$ et soient $\Phi(p)$ et $q(p)$ des fonctions analytiques telles que

$$\Phi(p)\, e^{-\tau q(p)} \doteqdot \varphi(t, \tau).$$

Alors

$$F[q(p)]\,\Phi(p) \doteqdot \int_0^\infty f(\tau)\,\varphi(t, \tau)\,d\tau.$$

En particulier, si $\Phi(p)=\frac{1}{\sqrt{p}}$, $q(p)=\sqrt{p}$, on a

$$\varphi(t, \tau)=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\,e^{-\tau^2/4t}.$$

Pour cette raison, si l'on sait que $F(p) \doteqdot f(t)$, le théorème d'Efros nous permet de trouver l'original de la fonction $\frac{F(\sqrt{p})}{\sqrt{p}}$:

$$\frac{F(\sqrt{p})}{\sqrt{p}} \doteqdot \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty f(\tau)\,e^{-\tau^2/4t}\,d\tau. \tag{19}$$

EXEMPLE 26. Posons

$$\Phi(p)=\frac{1}{p} \quad \text{et} \quad q(p)=\frac{1}{p}.$$

Ainsi, le produit ci-dessous donne

$$\Phi(p)\,e^{-\tau q(p)}=\frac{1}{p}\,e^{-\frac{\tau}{p}}.$$

Trouvons l'original de cette fonction au moyen du théorème de similitude en mettant préalablement en œuvre la formule

$$\frac{1}{p}\,e^{-\frac{1}{p}} \doteqdot I_0(2\sqrt{t}) \tag{20}$$

(cf. problème n° 597). D'où l'on a

$$\frac{1}{p}\,e^{-\frac{\tau}{p}} \doteqdot I_0(2\sqrt{\tau t}).$$

Ainsi, le théorème d'Efros (cf. formule (19)) donne

$$F\left(\frac{1}{p}\right)\cdot\frac{1}{p} \doteqdot \int_0^\infty f(\tau)\,I_0(2\sqrt{\tau t})\,d\tau. \tag{21}$$

En particulier, si l'on pose $f(\tau)=\cos\tau$, on obtient

$$F(p)=\frac{p}{p^2+1}, \qquad \text{et} \qquad F\left(\frac{1}{p}\right)=\frac{p}{p^2+1},$$

ce qui nous permet de mettre la formule (21) sous la forme

$$\int_0^\infty I_0(2\sqrt{\tau t})\cos\tau\, d\tau \risingdotseq \frac{1}{p^2+1}. \tag{22}$$

On sait que

$$\frac{1}{p^2+1} \risingdotseq \sin t. \tag{23}$$

Les formules (22) et (23) donnent

$$\int_0^\infty I_0(2\sqrt{\tau t})\cos\tau\, d\tau = \sin t.$$

Trouver les originaux des fonctions suivantes à l'aide du théorème d'Efros (a est un nombre réel):

638. $F(p)=\frac{e^{-\sqrt{p}x/a}}{p}$. **639.** $F(p)=\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{p\sqrt{p}}$.

640. $F(p)=\frac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{p^2}$. **641.** $F(p)=\frac{e^{-\sqrt{p}x/a}}{\sqrt{p}\left(\frac{\sqrt{p}}{a}+h\right)}$.

642. $F(p)=\frac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{p(\sqrt{p}+a)}$.

Calculer les intégrales suivantes en utilisant le théorème d'Efros:

643. $I(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty \operatorname{ch}\tau e^{-\tau^2/4t}\, d\tau$.

644. $I(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty \cos\tau e^{-\tau^2/4t}\, d\tau$.

645. $I(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty \tau\operatorname{sh}\tau e^{-\tau^2/4t}\, d\tau$.

646. $I(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty \tau\sin\tau e^{-\tau^2/4t}\, d\tau$.

Dans la pratique du calcul opérationnel, on fait appel à la dérivation et à l'intégration des originaux par rapport au paramètre que ceux derniers contiennent.

DÉRIVATION PAR RAPPORT À UN PARAMÈTRE

Supposons qu'une fonction $f(t, \alpha)$ pour tout $\alpha \in (\alpha_1, \alpha_2)$ est un original qui a comme image

$$F(p, \alpha) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t, \alpha)\, dt. \tag{1}$$

En supposant que l'intégrant de l'intégrale (1), qui est considérée en tant que fonction du paramètre α, peut être dérivé par rapport à ce paramètre, on obtient :

$$\frac{\partial F(p, \alpha)}{\partial \alpha} = \int_0^\infty e^{-pt} \frac{\partial f(t, \alpha)}{\partial \alpha}\, dt. \tag{2}$$

De cette façon, on arrive à la relation opérationnelle

$$f'_\alpha(t, \alpha) \doteqdot F'_\alpha(p, \alpha). \tag{3}$$

EXEMPLE 27. a) On sait que

$$\sin \alpha t \doteqdot \frac{\alpha}{p^2+\alpha^2}.$$

En utilisant la relation opérationnelle (3), on obtient

$$t \cos \alpha t \doteqdot \frac{p^2-\alpha^2}{(p^2+\alpha^2)^2}.$$

b) On sait que

$$\operatorname{ch} \alpha t \doteqdot \frac{p}{p^2-\alpha^2},$$

d'où, à l'aide de la formule (3), on obtient

$$t \operatorname{sh} \alpha t \doteqdot \frac{2p\alpha}{(p^2-\alpha^2)^2}.$$

INTÉGRATION] PAR RAPPORT À UN PARAMÈTRE

Soit $f(t, \alpha)$ une fonction qui pour tout $\alpha \in (\alpha_1, \alpha_2)$ est un original et supposons que $f(t, \alpha) \doteqdot F(p, \alpha)$.

En admettant que l'intégrale de Laplace qui figure dans le second membre de la formule (1) est intégrable par rapport au paramètre α de l'intégrant, on aboutit à la relation opérationnelle suivante

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(t, \alpha)\, d\alpha \doteqdot \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} F(p, \alpha)\, d\alpha. \tag{4}$$

EXEMPLE 28. a) On sait que

$$e^{\alpha t} \doteqdot \frac{1}{p-\alpha}.$$

En intégrant par rapport au paramètre de $\alpha = 0$ à α, on trouve

$$\int_0^\alpha e^{\alpha t}\, d\alpha \doteqdot \int_0^\alpha \frac{d\alpha}{p-\alpha} \quad \text{ou} \quad \frac{e^{\alpha t}-1}{t} \doteqdot \ln \frac{p}{p-\alpha}.$$

b) On sait que

$$\sin \alpha t \doteqdot \frac{\alpha}{p^2+\alpha^2},$$

d'où, en utilisant la formule (4), on tire

$$\int_0^\alpha \sin \alpha t\, dt \doteqdot \int_0^\alpha \frac{\alpha}{p^2+\alpha^2}\, d\alpha$$

ou

$$\frac{1-\cos \alpha t}{t} \doteqdot \frac{1}{2} \ln \frac{p^2+\alpha^2}{p^2}.$$

§ 15. Solution du problème de Cauchy posé pour les équations différentielles linéaires ordinaires à coefficients constants

Soit donnée une équation différentielle d'ordre 2 (pour simplifier l'exposé)

$$a_0 \frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_2 x(t) = f(t), \tag{1}$$

où a_0, a_1, a_2 = const, $a_0 \neq 0$, $f(t)$ est un original.

Tâchons de trouver la solution de l'équation (1) qui satisfait aux conditions initiales:

$$x(0) = x_0, \qquad x'(0) = x_1. \tag{2}$$

Soient $x(t) \doteqdot X(p)$, $f(t) \doteqdot F(p)$. En appliquant la transformation de Laplace aux deux membres de (1) et en faisant appel au théorème de dérivation de l'original et à la propriété de linéarité de cette transformation, on obtient à la place de l'équation (1) avec ses données initiales (2) l'équation opératorielle

$$(a_0p^2 + a_1p + a_2)\, X(p) - (a_0px_0 + a_0x_1 + a_1x_0) = F(p). \tag{3}$$

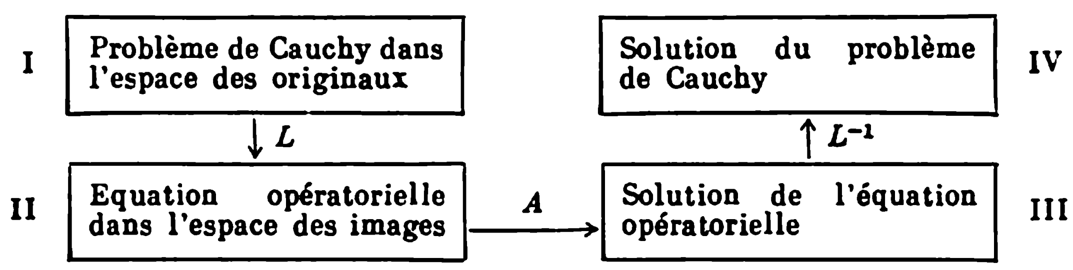
De (3), on trouve

$$X(p) = \frac{F(p) + a_0px_0 + a_0x_1 + a_1x_0}{a_0p^2 + a_1p + a_2}.$$

C'est l'ainsi appelée solution opératorielle. Lorsque l'on trouve l'original $x(t)$ en partant de $X(p)$, on arrive par là même à la fonction $x(t)$ qui est la solution du problème de Cauchy (1) avec les conditions initiales (2).

Il n'y a aucune différence de principe entre la résolution générale du problème de Cauchy posé pour une équation différentielle d'ordre n et la résolution examinée ci-dessus pour le cas où $n = 2$.

Itinéraire à suivre pour la résolution du problème de Cauchy à l'aide de la transformation de Laplace



Ici, on désigne par L l'application de la transformation de Laplace à I, par A la résolution de l'équation opératorielle II, et par L^{-1} l'application de la transformation réciproque de Laplace à III.

EXEMPLE 1. Résoudre le problème de Cauchy

$$x'' + x = 2\cos t; \qquad x(0) = 0, \quad x'(0) = -1.$$

SOLUTION.

$$x(t) \doteqdot X(p), \qquad x'(t) \doteqdot pX(p) - x(0) = pX(p),$$

$$x''(t) \doteqdot p^2X(p) - px(0) - x'(0) = p^2X(p) + 1, \qquad \cos t \doteqdot \frac{p}{p^2+1}$$

et l'équation opératorielle est de la forme

$$p^2X(p) + 1 + X(p) = \frac{2p}{p^2+1};$$

d'où

$$X(p) = \frac{2p}{(p^2+1)^2} - \frac{1}{p^2+1}.$$

On trouve l'original de $X(p)$. L'original de la fonction $\frac{1}{p^2+1}$ se présente comme suit :

$$\frac{1}{p^2+1} \doteqdot \sin t.$$

Pour trouver l'original de la fonction $\frac{2p}{(p^2+1)^2}$, utilisons, par exemple, le théorème de dérivation de l'image (cf. § 14) :

$$\frac{2p}{(p^2+1)^2} = -\left(\frac{1}{p^2+1}\right)'_p \doteqdot t\sin t.$$

Ainsi, $X(p) \doteqdot t\sin t - \sin t = (t-1)\sin t$.

Donc, $x(t) = (t-1)\sin t$.

Résoudre les équations différentielles suivantes compte tenu des conditions initiales indiquées:

647. $x' + x = e^{-t}$, $x(0) = 1$.
648. $x' - x = 1$, $x(0) = -1$.
649. $x' + 2x = \sin t$, $x(0) = 0$.
650. $x'' = 1$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.
651. $x'' + x' = 1$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.
652. $x'' + x = 0$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.
653. $x'' + 3x' = e^{t}$, $x(0) = 0$, $x'(0) = -1$.
654. $x'' - 2x' = e^{2t}$, $x(0) = x'(0) = 0$.
655. $x'' + 2x' - 3x = e^{-t}$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.
656. $x''' + x' = 1$, $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$.
657. $x'' + 2x' = t\sin t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.
658. $x'' + 2x' + x = \sin t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = -1$.
659. $x''' - x'' = \sin t$, $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$.
660. $x''' + x' = t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = -1$; $x''(0) = 0$.

661. $x'' - 2x' + x = e^t$; $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.
662. $x''' + 2x'' + 5x' = 0$, $x(0) = -1$, $x'(0) = 2$, $x''(0) = 0$.
663. $x'' - 2x' + 2x = 1$, $x(0) = x'(0) = 0$.
664. $x'' + x' = \cos t$, $x(0) = 2$, $x'(0) = 0$.
665. $x'' + 2x' + x = t^2$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.
666. $x''' + x'' = \sin t$, $x(0) = x'(0) = 1$, $x''(0) = 0$.
667. $x'' + x = \cos t$, $x(0) = -1$, $x'(0) = 1$.
668. $x''' + x'' = t$, $x(0) = -3$, $x'(0) = 1$, $x''(0) = 0$.
669. $x'' + 2x' + 5x = 3$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.
670. $x^{\text{IV}} - x'' = \cos t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = -1$,
$x''(0) = x'''(0) = 0$.
671. $x'' + 2x' + 2x = 1$, $x(0) = x'(0) = 0$.
672. $x'' + x = 1$, $x(0) = -1$, $x'(0) = 0$.
673. $x'' + 4x = t$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.
674. $x'' - 2x' + 5x = 1 - t$, $x(0) = x'(0) = 0$.
675. $x''' + x = 0$, $x(0) = 0$, $x'(0) = -1$, $x''(0) = 2$.
676. $x''' + x'' = \cos t$, $x(0) = -2$, $x'(0) = x''(0) = 0$.
677. $x''' + x' = e^t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 2$, $x''(0) = 0$.
678. $x^{\text{IV}} - x'' = 1$, $x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0$.
679. $x'' + x' = \cos t$, $x(0) = 2$, $x'(0) = 0$.
680. $x'' - x' = te^t$, $x(0) = x'(0) = 0$.
681. $x''' + x' = \cos t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = -2$, $x''(0) = 0$.
682. $x'' + 2x' + x = t$, $x(0) = x'(0) = 0$.
683. $x'' - x' + x = e^{-t}$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.
684. $x'' - x = \sin t$, $x(0) = -1$, $x'(0) = 0$.
685. $x''' + x = e^t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 2$, $x''(0) = 0$.
686. $x'' + x = 2 \sin t$, $x(0) = 1$, $x'(0) = -1$.
687. $x'' - 2x' + x = t - \sin t$, $x(0) = x'(0) = 0$.
688. $x'' + 2x' + x = 2 \cos^2 t$, $x(0) = x'(0) = 0$.
689. $x'' + 4x = 2 \cos t \cdot \cos 3t$, $x(0) = x'(0) = 0$.
690. $x'' + x = te^t + 4 \sin t$, $x(0) = x'(0) = 0$.
691. $x'' - x' = te^t$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.
692. $x'' + x' = 4 \sin^2 t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = -1$.
693. $x''' - 2x'' + x' = 4$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 2$, $x''(0) = -2$.
694. $x'' - 3x' + 2x = e^t$, $x(0) = x'(0) = 0$.
695. $x'' - x' = t^2$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.
696. $x''' + x = \frac{1}{2} t^2 e^t$, $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$.
697. $x'' + x = t \cos 2t$, $x(0) = x'(0) = 0$.
698. $x'' + n^2 x = a \sin (nt + \alpha)$, $x(0) = x'(0) = 0$.
699. $x''' + 6x'' + 11x' + 6x = 1 + t + t^2$,
$x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$.
700. $x^{\text{IV}} + 2x'' + x = t \sin t$,
$x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0$.
701. $x'' - 2\alpha x' + (\alpha^2 + \beta^2) x = 0$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.
702. $x'' + 4x = \sin t$, $x(0) = x'(0) = 0$.

703. $x''' + x' = e^{2t}$, $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$.

704. $x^{IV} + x''' = \cos t$, $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$, $x'''(0) = \gamma$.

705. $x'' - 4x = \sin\frac{3}{2}t \sin\frac{1}{2}t$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.

706. $x^{IV} - 5x'' + 10x' - 6x = 0$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$, $x''(0) = 6$, $x'''(0) = -14$.

707. $x'' + x' + x = te^t$, $x(0) = x'(0) = 0$.

708. $x'' + x = t\cos t$, $x(0) = x'(0) = 0$.

709. $x''' + 3x'' - 4x = 0$, $x(0) = x'(0) = 0$, $x''(0) = 2$.

710. $x''' + 3x'' + 3x' + x = 1$, $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$.

711. $x''' + x = 1$, $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$.

712. $x'' + \omega^2 x = a[\eta(t) - \eta(t - b)]$, $x(0) = x'(0) = 0$.

L'exigence impliquant que les conditions initiales soient données au point $t = 0$ n'est pas essentielle, car, par un changement linéaire de la variable indépendante t, on ramène le problème de Cauchy, pour $t = t_0 \neq 0$, à un problème à conditions initiales au point $t = 0$. Montrons ce qui vient d'être dit à l'aide d'une équation différentielle de second ordre.

On demande de trouver la solution de l'équation

$$a_0 x''(t) + a_1 x'(t) + a_2 x(t) = f(t), \tag{4}$$

qui vérifie les conditions initiales $x(t_0) = x_0$, $x'(t_0) = x_1$, où $t_0 \neq 0$.

Posons

$$t = \tau + t_0; \quad x(t) = x(\tau + t_0) = \tilde{x}(\tau); \quad f(t) = f(\tau + t_0) = \tilde{f}(\tau).$$

Alors

$$x'(t) = x'(\tau + t_0) = \tilde{x}'(\tau), \quad x''(t) = x''(\tau + t_0) = \tilde{x}''(\tau),$$

et l'équation (4) et les conditions initiales deviennent

$$a_0\tilde{x}''(\tau) + a_1\tilde{x}'(\tau) + a_2\tilde{x}(\tau) = \tilde{f}(\tau), \quad \tilde{x}(0) = x_0, \quad \tilde{x}'(0) = x_1. \tag{5}$$

Nous avons obtenu le problème de Cauchy posé pour l'équation (5) avec les conditions initiales données au point $\tau = 0$.

EXEMPLE 2. Trouver la solution de l'équation $x''(t) + x'(t) = t$ qui vérifie les conditions initiales $x(1) = 1$, $x'(1) = 0$.

SOLUTION. Posons $t = \tau + 1$ et $x(t) = x(\tau + 1) = \tilde{x}(\tau)$. Alors l'équation donnée et ses conditions initiales prennent la forme

$$\tilde{x}''(\tau) + \tilde{x}'(\tau) = \tau + 1, \quad \tilde{x}(0) = 1, \quad \tilde{x}'(0) = 0, \tag{6}$$

car à la valeur $t = 1$ correspond la valeur $\tau = 0$.

Formons l'équation opératorielle pour l'équation différentielle (6). Soit $\tilde{x}(t) \risingdotseq X(p)$. Alors

$$\tilde{x}'(\tau) \risingdotseq pX(p) - 1, \quad \tilde{x}''(\tau) \risingdotseq p^2X(p) - p,$$

et l'équation opératorielle sera

$$p^2X(p) - p + pX(p) - 1 = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p}.$$

En la résolvant par rapport à $X(p)$, on trouve

$$X(p) = \frac{1}{p^3} + \frac{1}{p}.$$

Le passage aux originaux donne

$$\tilde{x}(\tau)=1+\frac{\tau^2}{2}.$$

En substituant dans cette dernière expression $t-1$ à τ, on obtient la solution cherchée du problème de Cauchy

$$x(t)=1+\frac{(t-1)^2}{2}.$$

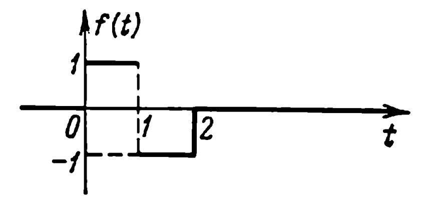
Résoudre les équations différentielles suivantes compte tenu des conditions initiales indiquées:

713. $x''+x=0;\quad x(\pi)=1,\quad x'(\pi)=0.$
714. $x''(t)+x'(t)=2t;\quad x(1)=1,\quad x'(1)=-1.$
715. $x''(t)-x'(t)=-2t;\quad x(2)=8,\quad x'(2)=6.$
716. $x''(t)+x(t)=-2\sin t;\quad x\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,\quad x'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1.$
717. $x''(t)+2x'(t)+x(t)=2e^{1-t};\quad x(1)=1,\quad x'(1)=-1.$

EXEMPLE 3. Résoudre le problème de Cauchy

$$x''+x=f(t),\qquad x(0)=x'(0)=0,$$

si la fonction $f(t)$ est donnée par le graphique ci-dessous



SOLUTION. Il est évident que

$$f(t)=\eta(t)-2\eta(t-1)+\eta(t-2),$$

donc, en appliquant la formule

$$f(t-\tau)\doteqdot e^{-p\tau}F(p),$$

on obtient

$$f(t)\doteqdot\frac{1}{p}-2\cdot\frac{e^{-p}}{p}+1\cdot e^{-2p}\frac{1}{p}=\frac{1-2e^{-p}+e^{-2p}}{p}.$$

En posant $x(t)\doteqdot X(p)$ et compte tenu des conditions initiales, on a

$$x''(t)\doteqdot p^2X(p)-px(0)-x'(0)=p^2X(p).$$

L'équation opératorielle est de la forme

$$(p^2+1)X(p)=\frac{1-2e^{-p}+e^{-2p}}{p},$$

d'où

$$X(p)=\frac{1}{p(p^2+1)}-\frac{2e^{-p}}{p(p^2+1)}+\frac{e^{-2p}}{p(p^2+1)}.$$

Etant donné que

$$\frac{1}{p(p^2+1)} \risingdotseq (1-\cos t)\,\eta(t),$$

car

$$\frac{1}{p(p^2+1)} = \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+1},$$

on a

$$\frac{1}{p(p^2+1)}e^{-p} \risingdotseq [1-\cos(t-1)]\,\eta(t-1)$$

et

$$\frac{1}{p(p^2+1)}e^{-2p} \risingdotseq [1-\cos(t-2)]\,\eta(t-2)$$

(on utilise ici le théorème de retardement: si $f(t) \risingdotseq F(p)$, alors

$$f(t-\tau) \risingdotseq e^{-p\tau}F(p)).$$

Cela signifie que

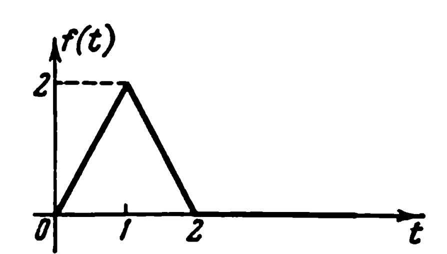
$$x(t) = (1-\cos t)\,\eta(t) - 2[1-\cos(t-1)]\,\eta(t-1) + [1-\cos(t-2)]\,\eta(t-2)$$

ou

$$x(t) = 2\left[\sin^2\frac{t}{2}\,\eta(t) - 2\sin^2\frac{t-1}{2}\,\eta(t-1) + \sin^2\frac{t-2}{2}\,\eta(t-2)\right].$$

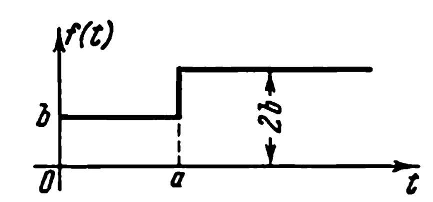
Résoudre les problèmes de Cauchy suivants:

718.



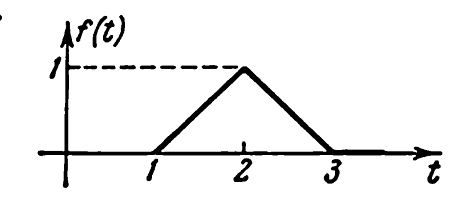
$x'' + 4x = f(t)$,
$x(0) = x'(0) = 0$.

719.



$x'' + x = f(t)$,
$x(0) = 1, \quad x'(0) = 0$.

720.



$x'' + 9x = f(t)$,
$x(0) = 0, \quad x'(0) = 1$.

721. $f(t)$: 1 on $[0, a]$, 0 on $[a, 2a]$, 1 on $[2a, 3a]$; axis t.

$$x'' - 2x' + x = f(t),$$
$$x(0) = x'(0) = 0.$$

722. Une particule de masse m est animée d'un mouvement rectiligne sous l'action d'une force de rappel $m\lambda x$, qui est proportionnelle à l'écart, et d'un effort résistant $2m\mu v$ proportionnel à la vitesse de déplacement. Au moment $t = 0$, la distance entre la particule et la position d'équilibre est égale à x_0, la vitesse de déplacement de la particule étant v_0. Montrer que si l'égalité $n^2 = \lambda^2 - \mu^2$ est vérifiée, le mouvement de la particule est défini par l'expression

$$\frac{1}{n} e^{-\mu t} [nx_0 \cos nt + (v_0 + \mu x_0) \sin nt].$$

723. Une particule de masse m peut accomplir de petites oscillations autour de la position d'équilibre sous l'action d'une force de rappel mn^2x proportionnelle à l'écart. L'état de repos de la particule est perturbé par une force constante F qui agit pendant un laps de temps T. Montrer que l'amplitude de l'oscillation est égale à

$$\frac{2F}{mn^2} \sin \frac{nT}{2} \quad \text{pour} \quad t > T.$$

724. L'état de repos d'un pendule simple de longueur l est perturbé à la suite des petits écarts que subit son point de suspension dans le sens horizontal. Montrer qu'à un déplacement a du point de suspension il correspond un écart du pendule égal à a $(1 - \cos nt)$, $n^2 = g/l$.

725. Une particule est lancée verticalement vers le haut à une vitesse v_0. La particule lancée est soumise à l'action de la force de pesanteur et d'un effort résistant $2kmv$. Montrer qu'à l'instant t la distance entre la particule et son point de lancement sera $-\frac{gt}{2k} + \frac{g + 2kv_0}{4k^2}(1 - e^{-2kt})$.

726. Un point matériel de 2g de masse est animé d'un mouvement rectiligne sous l'action d'une force F qui croît de a dynes par seconde. A l'instant initial, le point se trouvait à l'origine des coordonnées et sa vitesse était $v_0 = 10$ cm/s. Trouver la valeur de la grandeur a si la valeur initiale de la force $F_0 = 4$ dyn et si à une distance de 450 cm à l'origine des coordonnées la vitesse $v = 105$ cm/s.

727. Un point matériel de masse m animé d'un mouvement rectiligne s'écarte de l'origine des coordonnées O sous l'action d'une force F qui est directement proportionnelle à la distance parcourue ($F = 4mx$). Le point subit en outre l'action de la résistance du

milieu $R = 3\ mv$. A l'instant initial, la distance entre le point et l'origine des coordonnées est égale à 1, alors que la vitesse est nulle. Trouver la loi du mouvement du point.

728. Un point pesant de masse m tombe dans un milieu dont la résistance est directement proportionnelle à la puissance 1 de la vitesse. Trouver la vitesse maximale du point en sachant que pour $v = 1$ m/s la résistance est égale à un tiers du poids du point et que la vitesse initiale $v_0 = 0$.

729. Un point matériel de masse m se déplace dans un milieu dont la résistance est directement proportionnelle à la puissance 1 de la vitesse (la constante de proportionnalité est k). Quelle sera la distance parcourue par le point jusqu'à son arrêt complet si la vitesse initiale qui lui est communiquée est v_0 et s'il ne subit l'action d'aucune autre force, sauf celle exercée par la résistance du milieu?

730. Une chaînette pesante homogène de masse m et de longueur $2l$ repose sur une table lisse horizontale de façon que l'une de ses moitiés pende du bord de la table. Trouver la loi du mouvement de la chaînette qui glisse de la table et déterminer le temps de ce glissement.

731. Une masse ponctuelle m se trouve sur la droite qui passe par deux centres A et B la distance entre lesquels est égale à $2d$. Les forces d'attraction exercées par les centres sur la masse sont directement proportionnelles aux distances de cette dernière aux centres; la constante de proportionnalité mk^2 est la même pour les deux centres. A l'instant initial, la distance entre la masse et le milieu O du segment AB est égale à a, sa vitesse initiale étant nulle. Trouver la loi du mouvement de la masse ponctuelle.

732. Un centre immobile O attire une masse ponctuelle m avec une force $F = \mu mr$, où r est la distance de la masse au centre, μ étant un coefficient constant. A l'instant initial, $r = a$ et $v = 0$. Combien de temps mettra la masse pour arriver au point O?

733. Une barque possède une vitesse initiale $v_0 = 6$ m/s. Au bout de 69 s qui suivent la mise en marche de la barque, la vitesse susmentionnée est réduite de moitié. Trouver la loi du mouvement si l'on sait que la résistance opposée par l'eau est proportionnelle à la vitesse de déplacement de la barque.

734. Un point matériel de masse $m = 2$ effectue des oscillations rectilignes suivant l'axe Ox sous l'action d'une force de rappel, qui est proportionnelle à la distance du point à l'origine des coordonnées (la constante de proportionnalité est égale à 8), et d'une force perturbatrice $F = 4 \cos t$. Trouver la loi du mouvement du point si, à l'instant initial, $x = 0$, $v = 0$.

735. Trouver la loi du mouvement d'un point matériel de masse m attiré par un centre immobile O avec une force directement proportionnelle à la distance et égale à k^2m si cette distance est égale à l'unité de longueur.

A l'instant initial, la distance du point au centre O était égale à a, sa vitesse v_0 étant dirigée perpendiculairement à la droite qui relie la position initiale au centre O.

736. Résoudre le problème n° 735 en supposant que le point matériel de masse m s'écarte du centre sous l'action d'une force directement proportionnelle à la distance, la constante de proportionnalité ayant la même valeur.

737. A l'instant $t = 0$, une f.é.m. $E \cos(\omega t + \alpha)$ est appliquée à un circuit constitué de la capacité C et de la self L mises en série. Le courant initial et la charge initiale sont nuls. Montrer qu'à l'instant t le courant est égal à

$$E\{\omega \sin(\omega t+\alpha)-n\cos\alpha \sin nt-\omega \sin\alpha \cos nt\}\,\frac{1}{L(\omega^2-n^2)},$$

où $n^2 = \frac{1}{LC}$; on suppose que $n^2 \neq \omega^2$.

738. Au circuit de l'exemple précédent (courant initial et charge initiale nuls) on applique, à l'instant $t = 0$, une f.é.m. $E \sin nt$ à fréquence de résonance. Montrer que le courant est donné par la relation $\frac{E}{2L} t \sin nt$, où $n^2 = \frac{1}{LC}$.

739. A la résistance R d'inductance L on applique une f.é.m. $E \sin(\omega t + \alpha)$. Le courant initial étant nul, montrer que le courant est donné par l'expression

$$E\{\sin(\gamma-\alpha)\,e^{-\frac{Rt}{L}}+\sin(\omega t+\alpha-\gamma)\}\,(R^2+L^2\omega^2)^{-\frac{1}{2}},$$

où $\operatorname{tg}\gamma = \frac{\omega L}{R}$.

740. A un circuit constitué des éléments L, R et C montés en série et dont le courant initial et la charge initiale sont nuls on applique une f.é.m. égale à E_1, pour $0 < t \leqslant T$, et à E_2, pour $t > T$; E_1, E_2 sont constantes. Montrer que pour $t > T$ le courant qui parcourt le circuit est égal à

$$\frac{E_1}{nL}\,e^{-\mu t}\sin nt-\frac{E_1-E_2}{nL}\,e^{-\mu(t-T)}\sin n(t-T)$$

où $\mu = \frac{R}{2L}$ et $n^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}$, de plus on suppose que $n^2 > 0$.

741. A un circuit constitué de la self L, de la résistance R et de la capacité C montées en série on applique une f.é.m. constante E. La charge initiale et le courant initial sont nuls. Montrer qu'à l'instant t le courant I est donné par l'expression

$$I=\begin{cases}\frac{E}{nL}\,e^{-\mu t}\sin nt & \text{pour} \quad n^2>0,\\ \frac{E}{L}\,te^{-\mu t} & \text{pour} \quad n^2=0,\end{cases}$$

où $n^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}$, $\mu = \frac{R}{2L}$.

RÉSOLUTION DE CERTAINES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES À COEFFICIENTS VARIABLES

Soit donnée l'équation

$$a_0(t)\, x^{(n)}(t) + a_1(t)\, x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n(t)\, x(t) = f(t), \tag{7}$$

où $a_0(t)$, $a_1(t)$, ..., $a_n(t)$ sont des polynômes en t de degré $\leqslant m$, $f(t)$ étant un original. Supposons que le problème de Cauchy

$$x|_{t=0} = x_0, \quad x'|_{t=0} = x_0', \ \ldots, \ x^{(n-1)}|_{t=0} = x_0^{(n-1)} \tag{8}$$

posé pour l'équation (7) admette une solution.

Soit

$$x(t) \risingdotseq X(p).$$

En vertu du théorème de dérivation de l'image,

$$t^k x^{(s)}(t) \risingdotseq (-1)^k \frac{d^k}{dp^k} \{L(x^{(s)}(t))\} =$$

$$= (-1)^k \frac{d^k}{dp^k} [p^s X(p) - p^{s-1} x_0 - \ldots - x_0^{(s-1)}].$$

Ici $L\{x^{(s)}(t)\}$ est l'image de la fonction $x^{(s)}(t)$.

De cette façon, en appliquant la transformation de Laplace aux deux membres de l'équation (7), on convertit celle-ci en une équation différentielle d'ordre m par rapport à l'image $X(p)$ de la fonction $x(t)$. Si $m < n$, l'intégration de l'équation (7) devient plus simple.

EXEMPLE 4. Trouver la solution générale de l'équation

$$tx'' - 2x' = 0. \tag{9}$$

SOLUTION. Soit $x(t) \risingdotseq X(p)$. Alors

$$x'(t) \risingdotseq pX(p) - x(0), \quad x''(t) \risingdotseq p^2 X(p) - px(0) - x'(0),$$

$$tx''(t) \risingdotseq -\frac{d}{dp}\{p^2 X(p) - px(0) - x'(0)\} = -p^2 \frac{dX(p)}{dp} - 2pX(p) + x(0).$$

L'équation (9) prend la forme

$$-p^2 \frac{dX(p)}{dp} - 2pX(p) + x(0) - 2pX(p) + 2x(0) = 0$$

ou

$$\frac{dX(p)}{dp} + \frac{4}{p} X(p) = \frac{3x(0)}{p^2}.$$

En intégrant cette équation en tant qu'équation linéaire non homogène par rapport à $X(p)$, on trouve

$$X(p) = \frac{x(0)}{p} + \frac{C_1}{p^4}, \qquad \text{d'où} \qquad x(t) = x(0) + C_1 \frac{t^3}{3!}$$

représente la solution de l'équation de départ.

EXEMPLE 5. Considérons l'équation de Bessel

$$t^2 x''(t) + tx'(t) + (t^2 - n^2)\, x(t) = 0 \quad (t > 0, \ n \text{ est un entier}) \tag{10}$$

et tâchons de trouver sa solution qui vérifie les conditions initiales $x(0) = x_0$, $x'(0) = x_1$.

Soit $x(t) \risingdotseq X(p)$. Alors

$$x'(t) \risingdotseq pX(p) - x_0, \qquad x''(t) \risingdotseq p^2X(p) - px_0 - x_1.$$

Ensuite,

$$t^2x''(t) \risingdotseq \frac{d^2}{dp^2}[p^2X(p) - px_0 - x_1] = \frac{d^2}{dp^2}[p^2X(p)],$$

$$tx'(t) \risingdotseq -\frac{d}{dp}[pX(p) - x_0] = -\frac{d}{dp}[pX(p)],$$

et l'équation (10) devient

$$\frac{d^2}{dp^2}[p^2X(p)] - \frac{d}{dp}[pX(p)] + \frac{d^2X(p)}{dp^2} - n^2X(p) = 0$$

ou

$$(1+p^2)\frac{d^2X(p)}{dp^2} + 3p\frac{dX(p)}{dp} + (1-n^2)X(p) = 0. \tag{11}$$

Pour résoudre l'équation (11), introduisons une nouvelle variable indépendante et une nouvelle fonction cherchée au moyen des formules

$$p = \operatorname{sh} u, \qquad X(p) = \frac{z}{\operatorname{ch} u}.$$

Ainsi, l'équation (11) deviendra

$$\frac{d^2z}{du^2} - n^2z = 0.$$

La solution générale de cette équation est de la forme

$$z = C_1e^{nu} + C_2e^{-nu}.$$

Etant donné que $p = \operatorname{sh} u$, on obtient $\operatorname{ch} u = \sqrt{p^2+1}$. Ayant en vue que $\operatorname{sh} u$ et $\operatorname{ch} u$ peuvent être exprimés par des fonctions exponentielles, on trouve

$$\frac{e^u - e^{-u}}{2} = p, \qquad \frac{e^u + e^{-u}}{2} = \sqrt{p^2+1},$$

d'où

$$e^u = \sqrt{p^2+1} + p, \qquad e^{-u} = \sqrt{p^2+1} - p,$$

et

$$z = C_1(\sqrt{p^2+1} + p)^n + C_2(\sqrt{p^2+1} - p)^n.$$

Pour $X(p)$, on obtient

$$X(p) = \frac{z}{\operatorname{ch} u} = \frac{C_1(\sqrt{p^2+1}+p)^n + C_2(\sqrt{p^2+1}-p)^n}{\sqrt{p^2+1}}. \tag{12}$$

Pour $n = 0$, on tire à partir de (12)

$$X(p) = \frac{C_1 + C_2}{\sqrt{p^2+1}} \risingdotseq (C_1 + C_2)J_0(t).$$

Si l'on choisit $C_1 + C_2 = 1$, on obtient la solution $x(t) = J_0(t)$ qui est une fonction de Bessel de première espèce et d'ordre zéro.

12—01485

En posant $n = 1$ et en choisissant $C_1 = 0$, $C_2 = 1$, on aboutit à la solution $x(t) = J_1(t)$ de l'équation (10).

Trouver les solutions des équations suivantes:

742. $tx'' + (2t - 1)x' + (t - 1)x = 0$.
743. $tx'' + 2x' = 0$.
744. $x'' + (t + 1)x' + tx = 0$, $x(0) = 1$, $x'(0) = -1$.
745. $x'' + (t + b)x' = 0$, $x(0) = -1$, $x'(0) = 0$ (b est un nombre réel quelconque).
746. $x'' + tx' - (t + 1)x = 0$, $x(0) = x'(0) = 1$.
747. $x'' - tx' + nx = 0$, n est un entier, $n > 0$ (équation de Tchébychev-Hermite):
a) $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$, $n = 2k$;
b) $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$, $n = 2k + 1$.

§ 16. Intégrale de Duhamel

Si la fonction $f(t)$ est continue sur $[0, +\infty)$, alors que la fonction $\varphi(t)$ est continûment différentiable sur $[0, +\infty)$, et si

$$F(p) \risingdotseq f(t), \qquad \Phi(p) \risingdotseq \varphi(t),$$

alors

$$F(p)\,\Phi(p) \risingdotseq \int_0^t f(\tau)\,\varphi(t-\tau)\,d\tau.$$

D'ici, d'après le théorème de dérivation de l'original, on tire

$$pF(p)\,\Phi(p) \risingdotseq f(t)\,\varphi(0) + \int_0^t f(\tau)\,\varphi'(t-\tau)\,d\tau. \tag{1}$$

C'est l'ainsi appelée *formule de Duhamel*.

On demande de trouver la solution de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre n

$$L[x] \equiv a_0 x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n x(t) = f(t), \quad a_0 \neq 0, \tag{2}$$

à conditions initiales nulles

$$x(0) = x'(0) = \ldots = x^{(n-1)}(0) = 0. \tag{3}$$

Supposons connue la solution de l'équation

$$L[x] = 1 \tag{4}$$

ayant le même premier membre et le second membre égal à l'unité et en présence des conditions (3). Lorsque l'on passe aux équations opératorielles, on obtient ($A(p)$ est un polynôme en p connu)

$$A(p)\,X(p) = F(p) \tag{5}$$

pour (2) et

$$A(p)\,X_1(p) = \frac{1}{p} \tag{6}$$

pour (4). A partir de (5) on trouve $X(p)=\frac{F(p)}{A(p)}$, tandis que de (6) on obtient $A(p)=\frac{1}{pX_1(p)}$, d'où $X(p)=pX_1(p)F(p)$. Conformément à la formule (1),

$$pX_1(p)F(p) \risingdotseq f(t)\,x_1(0)+\int_0^t f(\tau)\,x_1'(t-\tau)\,d\tau. \tag{7}$$

Compte tenu du fait que $x_1(0)=0$, on obtient

$$X(p)=pX_1(p)F(p) \risingdotseq \int_0^t f(\tau)\,x_1'(t-\tau)\,d\tau. \tag{8}$$

D'ici on arrive à la solution $x(t)$ de l'équation (2) en présence des conditions initiales nulles (3) qui est de la forme

$$x(t)=\int_0^t f(\tau)\,x_1'(t-\tau)\,d\tau, \tag{9}$$

où $x_1(t)$ est la solution du problème (4)-(3).

EXEMPLE 1. A l'aide de la formule de Duhamel, résoudre l'équation ci-dessous compte tenu des conditions initiales indiquées:

$$x''(t)-x(t)=\frac{1}{1+e^t}, \qquad x(0)=x'(0)=0.$$

SOLUTION. Considérons le problème auxiliaire

$$x_1''(t)-x_1(t)=1, \qquad x_1(0)=x_1'(0)=0.$$

Au moyen de la méthode opérationnelle, on trouve

$$X_1(p)=\frac{1}{p(p^2-1)},$$

d'où

$$x_1(t)=\int_0^t \operatorname{sh}\tau\,d\tau=\operatorname{ch}t-1.$$

D'après la formule (9), on a

$$x(t)=\int_0^t \frac{1}{1+e^\tau}\operatorname{sh}(t-\tau)\,d\tau=\frac{1}{2}(e^t-te^t-1)+\operatorname{sh}t\cdot\ln\frac{1+e^t}{2}.$$

L'exigence qui implique la nullité des conditions initiales n'est pas essentielle: en effectuant un simple changement de la fonction cherchée, on peut ramener le problème à conditions initiales non nulles à un problème doté de conditions initiales nulles. Illustrons cette affirmation à l'aide d'une équation différentielle d'ordre 2.

Supposons qu'il nous faut trouver la solution de l'équation

$$a_0x''(t)+a_1x'(t)+a_2x(t)=f(t), \tag{10}$$

qui vérifie les conditions initiales nulles

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1.$$

Posons

$$y(t) = x(t) - x_0 - x_1 t. \tag{11}$$

Alors

$$y'(t) = x'(t) - x_1, \quad y''(t) = x''(t)$$

et l'équation (10) prend la forme

$$a_0 y''(t) + a_1 y'(t) + a_2 y(t) = f_1(t),$$

où

$$f_1(t) = f(t) - a_1 x_1 - a_2 x_0 - a_2 x_1 t.$$

Ensuite, en vertu de (11),

$$y(0) = x(0) - x_0 = 0, \quad y'(0) = x'(0) - x_1 = 0.$$

De cette façon, on aboutit au problème de Cauchy suivant:

$$a_0 y''(t) + a_1 y'(t) + a_2 y(t) = f_1(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

à conditions initiales nulles.

EXEMPLE 2. A l'aide de la formule de Duhamel, résoudre le problème de Cauchy suivant:

$$x'' + 2x' + x = \frac{e^{-t}}{(1+t)^2} + t, \tag{12}$$

$$x(0) = -2, \quad x'(0) = 1. \tag{13}$$

SOLUTION. On ramène le problème (12)-(13) à un problème à conditions initiales nulles. A cette fin, on pose

$$y(t) = x(t) + 2 - t.$$

Alors

$$y'(t) = x'(t) - 1, \quad y''(t) = x''(t),$$

et l'équation (12) devient

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = \frac{e^{-t}}{(1+t)^2},$$

où

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

En résolvant ce dernier problème à l'aide de la formule de Duhamel, on trouve

$$y = e^{-t}[t - \ln(1+t)].$$

La solution du problème initial (12)-(13) sera donc

$$x(t) = e^{-t}[t - \ln(1+t)] - 2 + t.$$

A l'aide de la formule de Duhamel, résoudre les équations suivantes compte tenu des conditions initiales indiquées:

748. $x'' - x' = \dfrac{e^{2t}}{(1+e^t)^2}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

749. $x'' + 2x' + x = \frac{e^{-t}}{1+t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

750. $x'' - x' = \frac{e^{2t}}{2+e^t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

751. $x'' - x' = \frac{1}{1+e^t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

752. $x'' + x = \frac{1}{2+\cos t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

753. $x'' + x = \frac{1}{4+\operatorname{tg}^2 t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

754. $x'' + x = \frac{1}{1+\cos^2 t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

755. $x'' + x = \frac{1}{1+\sin^2 t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

756. $x'' - x = \operatorname{th} t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

757. $x'' + x' = \frac{1}{2+\sin t}, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0.$

§ 17. Résolution d'un système d'équations différentielles linéaires au moyen de la méthode opérationnelle

La résolution d'un système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants avec l'utilisation des procédés du calcul opérationnel est entreprise en suivant le même chemin que celui qui aboutit à la solution d'une seule équation différentielle.

On demande, par exemple, de résoudre le système d'équations différentielles d'ordre 2

$$\sum_{k=1}^{n} \left(a_{ik} \frac{d^2 x_k}{dt^2} + b_{ik} \frac{dx_k}{dt} + c_{ik} x_k \right) = f_i(t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

où a_{ik}, b_{ik}, c_{ik} = const, les conditions initiales étant

$$x_k(0) = \alpha_k, \qquad x'_k(0) = \beta_k. \tag{2}$$

En désignant par $X_k(p)$ et par $F_i(p)$ les images de $x_k(t)$ et de $f_i(t)$, on passe, compte tenu de (2), du système (1) au système opératoriel

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{ik}p^2 + b_{ik}p + c_{ik}) X_k(p) = F_i(p) + \sum_{k=1}^{n} [(a_{ik}p + b_{ik}) \alpha_k + a_{ik}\beta_k] \tag{3}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

En résolvant par rapport à $X_k(p)$ le système (3) en tant que système d'équations algébriques linéaires, on trouve d'abord $X_k(p)$ et, ensuite, leurs originaux $x_k(t)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Les originaux ainsi obtenus constituent la solution du problème de Cauchy posé pour le système (1).

EXEMPLE. Résoudre le système d'équations

$$\begin{cases} x'' = 3(y-x+z), & x(0)=0, \quad x'(0)=0, \\ y'' = x-y, & y(0)=0, \quad y'(0)=-1, \\ z'' = -z, & z(0)=1, \quad z'(0)=0. \end{cases}$$

SOLUTION. En passant au système opératoriel, on trouve

$$\begin{cases} p^2X = 3(Y-X+Z), \\ p^2Y+1 = X-Y, \\ p^2Z-p = -Z, \end{cases}$$

où

$$X(p) \risingdotseq x(t), \qquad Y(p) \risingdotseq y(t); \qquad Z(p) \risingdotseq z(t).$$

En résolvant le dernier système par rapport à $X(p)$, $Y(p)$ et $Z(p)$, on obtient

$$X(p) = \frac{3(p-1)}{p^2(p^2+4)}, \qquad Y(p) = \frac{3(p-1)}{p^2(p^2+1)(p^2+4)} - \frac{1}{p^2+1},$$

$$Z(p) = \frac{p}{p^2+1}.$$

La recherche des originaux de $X(p)$, $Y(p)$, $Z(p)$ donne

$$x(t) = \frac{3}{4}(1-t) - \frac{3}{4}\cos 2t + \frac{3}{8}\sin 2t,$$

$$y(t) = \frac{3}{4}(1-t) + \frac{1}{4}\cos 2t - \frac{1}{8}\sin 2t - \cos t,$$

$$z(t) = \cos t.$$

Résoudre les systèmes d'équations suivants:

758. $\begin{cases} x'+y=0, \\ y'+x=0, \end{cases} \quad x(0)=1, \quad y(0)=-1.$

759. $\begin{cases} x+x'=y+e^t, \\ y+y'=x+e^t, \end{cases} \quad x(0)=y(0)=1.$

760. $\begin{cases} x'-y'-2x+2y=1-2t, \\ x''+2y'+x=0, \end{cases} \quad x(0)=y(0)=x'(0)=0.$

761. $\begin{cases} x''-3x'+2x+y'-y=0, & x(0)=x'(0)=y'(0)=0, \\ -x'+x+y''-5y'+4y=0, & y(0)=1. \end{cases}$

762. $\begin{cases} x'=-y, \\ y'=2x+2y, \end{cases} \quad x(0)=y(0)=1.$

763. $\begin{cases} 2x''-x'+9x-y''-y'-3y=0, & x(0)=x'(0)=1, \\ 2x''+x'+7x-y''+y'-5y=0, & y(0)=y'(0)=0. \end{cases}$

764. $\begin{cases} x' + y' - y = e^t, \\ 2x' + y' + 2y = \cos t, \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 0.$

765. $\begin{cases} x' = -x + y + z + e^t, \\ y' = x - y + z + e^{3t}, \\ z' = x + y + z + 4, \end{cases}$ $x(0) = y(0) = z(0) = 0.$

766. $\begin{cases} x' = -y - z, \\ y' = -x - z, \\ z' = -x - y, \end{cases}$ $x(0) = -1, \quad y(0) = 0, \quad z(0) = 1.$

767. $\begin{cases} x' = y + z, \\ y' = 3x + z, \\ z' = 3x + y, \end{cases}$ $x(0) = 0, \quad y(0) = 1, \quad z(0) = 1.$

768. $\begin{cases} x' = 3y - x, \\ y' = y + x + e^{at}, \end{cases}$ $x(0) = 1, \quad y(0) = 1.$

769. $\begin{cases} x' = 2x - y + z, \\ y' = x + z, \\ z' = -3x + y - 2z, \end{cases}$ $x(0) = 1, \quad y(0) = 1, \quad z(0) = 0.$

770. $\begin{cases} x' = -2x - 2y - 4z, \\ y' = -2x + y - 2z, \\ z' = 5x + 2y + 7z, \end{cases}$ $x(0) = y(0) = z(0) = 1.$

771. $\begin{cases} tx' = -x + y + z + t, \\ ty' = x - y + z + t^3, \\ tz' = x + y + z + 4, \end{cases}$ $z(1) = y(1) = z(1) = 0.$

772. $\begin{cases} x_0' = -cx_0, \\ x_1' = -cx_1 + cx_0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_n' = -cx_n + cx_{n-1}, \end{cases}$ $\begin{array}{l} x_0(0) = 1, \\ x_1(0) = x_2(0) = \ldots = x_n(0) = 0. \end{array}$

773. $\begin{cases} 3x' + 2x + y' = 1, \\ x' + 4y' + 3y = 0, \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 0.$

774. $\begin{cases} 3tx' = 2x + y - z, \\ 2ty' = x + 3y + z, \\ 6tz' = -x + 7y + 5z, \end{cases}$ $x(1) = y(1) = z(1) = 1.$

775. $\begin{cases} x' - x - 2y = t, \\ -2x + y' - y = t, \end{cases}$ $x(0) = 2, \quad y(0) = 4.$

776. Un électron sort de l'origine des coordonnées à une vitesse initiale $\mathbf{v}_0$ dirigée suivant l'axe Ox. Trouver la loi du mouvement de l'électron si l'intensité du champ magnétique **H** reste invariable et est dirigée perpendiculairement au plan xOy.

777. Un obus quitte le canon à une vitesse initiale $\mathbf{v}_0$ (m/s) étant lancé sous un angle de 45° par rapport à l'horizon. En négligeant la résistance opposée par l'air, trouver l'altitude maximale atteinte par l'obus et son point d'impact.

778. Un électron se déplace dans un champ magnétique d'intensité constante **H**. Trouver la trajectoire décrite si la vitesse initiale $\mathbf{v}_0$ forme un angle α avec la direction du champ.

779. Trouver la loi du mouvement d'un point matériel pesant lancé à une vitesse initiale $\mathbf{v}_0$ sous un angle α par rapport à l'horizon si la résistance opposée par le milieu ambiant est proportionnelle à la puissance 1 de la vitesse ($\mathbf{F} = mk\mathbf{v}$).

780. Une particule de masse m et de charge e sort de l'origine des coordonnées à une vitesse $(u, 0, 0)$. La particule est soumise à l'action d'un champ magnétique constant **H**, dirigé parallèlement à l'axe Oz, et de la résistance opposée par le milieu ambiant $km\mathbf{v}$ ($\mathbf{v}$ est la vitesse de la particule). Montrer qu'à l'instant t les coordonnées de la particule sont données par les relations

$$x = \frac{kue^{-kt}}{k^2+\lambda^2}\left(e^{kt} - \cos\lambda t + \frac{\lambda}{k}\sin\lambda t\right),$$

$$y = -\frac{\lambda u}{k^2+\lambda^2} + \frac{ue^{-kt}}{k^2+\lambda^2}(\lambda\cos\lambda t + k\sin\lambda t),$$

où $\lambda = \frac{eH}{mc}$, c étant la vitesse de la lumière.

781. Une particule se déplace dans un milieu résistant, qui exerce sur elle une action $\mathbf{F} = 2\lambda\mathbf{v}$ ($\mathbf{v}$ est la vitesse de la particule), et est attirée par le point (0, 0) avec une force $\mu^2 r$ ($m = 1$). Au point $(a, 0)$ la vitesse de la particule est égale à v_0 et est dirigée parallèlement à l'axe Oy. Montrer que pour $\mu > \lambda$, la trajectoire de la particule est définie par les équations

$$x = ae^{-\lambda t}\left[\cos\omega t + \frac{\lambda}{\omega}\sin\omega t\right], \qquad y = \frac{v_0}{\omega}e^{-\lambda t}\sin\omega t,$$

où $\omega = \sqrt{\mu^2 - \lambda^2}$, r étant la distance entre le point en mouvement et le point (0, 0).

782. Un point matériel A de masse m qui se trouve à une distance a à l'axe Ox possède une vitesse initiale v_0 dirigée parallèlement à l'axe Ox. Le point A est attiré par l'axe Ox avec une force **F** directement proportionnelle à la distance qui le sépare de cet axe; la constante de proportionnalité est égale à mk^2. Trouver l'équation du mouvement du point et la trajectoire qu'il décrit.

§ 18. Résolution des équations de Volterra à noyaux de type spécial

On appelle *équation intégrale* une équation dont la fonction inconnue se trouve sous un signe d'intégration. Par exemple, la résolution du problème de Cauchy

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0,$$

se ramène, comme on le sait, à la résolution de l'équation intégrale suivante:

$$y = \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))\, dx + y_0.$$

Si la fonction inconnue y qui figure dans l'équation est une fonction linéaire l'équation intégrale est également une équation *linéaire*.

L'équation du type

$$y(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t)\, y(t)\, dt \tag{1}$$

(a et b sont des constantes) est appelée *équation intégrale linéaire de Fredholm de deuxième espèce*. Ici $K(x, t)$, $f(x)$ sont des fonctions données, alors que $y(x)$ est la fonction inconnue. La fonction $K(x, t)$ est appelée noyau de l'équation (1).

L'équation

$$y(x) = f(x) + \int_a^x K(x, t)\, y(t)\, dt \tag{2}$$

est appelée *équation intégrale linéaire de Volterra de deuxième espèce*.

Si dans les équations (1) et (2) on a $f(x) \equiv 0$, ces équations sont dites *homogènes*.

Si la fonction inconnue $y(x)$ ne figure que sous le signe d'intégration, on a respectivement affaire aux *équations de Fredholm ou de Volterra de première espèce*

$$\int_a^b K(x, t)\, y(t)\, dt = f(x) \qquad \text{ou} \qquad \int_a^x K(x, t)\, y(t)\, dt = f(x).$$

Les équations de type

$$\varphi(x) + \int_0^x K(x - t)\, \varphi(t)\, dt = f(x) \tag{3}$$

dont le noyau $K(x - t)$ ne dépend que de la différence des arguments, représentent une classe importante d'équations de Volterra. Parfois, on les appelle équations *de type convolution*.

Soit donnée une équation de Volterra de type convolution

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x K(x - t)\, \varphi(t)\, dt. \tag{4}$$

Supposons que les fonctions $f(x)$ et $K(x)$ soient assez lisses et que leur ordre de croissance soit fini pour $x \geqslant 0$. Dans ce cas, $\varphi(x)$ présente un ordre de crois-

sance fini pour $x \geqslant 0$, ce qui signifie que l'on peut trouver les images des fonctions f, K et φ (selon Laplace). Soient $\Phi(p) \doteqdot \varphi(x)$, $F(p) \doteqdot f(x)$, $L(p) \doteqdot K(x)$. En appliquant la transformation de Laplace aux deux membres de l'équation (4) et en utilisant la formule de convolution (cf. § 14, IX), on obtient

$$\Phi(p) = F(p) + L(p)\,\Phi(p), \tag{5}$$

d'où

$$\Phi(p) = \frac{F(p)}{1 - L(p)}, \quad L(p) \neq 1. \tag{6}$$

Pour $\Phi(p)$, on trouve l'original $\varphi(x)$ qui représente la solution de l'équation intégrale (4).

EXEMPLE 1. Résoudre l'équation intégrale

$$\varphi(x) = \cos x + \int_0^x (x-t)\varphi(t)\,dt. \tag{7}$$

SOLUTION. En passant aux images et en considérant l'intégrale comme une convolution de fonctions, on obtient en vertu de la règle de l'image d'une convolution

$$\Phi(p) = \frac{p}{p^2+1} + \frac{1}{p^2}\Phi(p), \tag{8}$$

d'où

$$\Phi(p) = \frac{p^3}{(p^2+1)(p^2-1)}. \tag{9}$$

On trouve l'original de $\Phi(p)$ et l'on aboutit ainsi à la solution de l'équation intégrale (7)

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}(\cos x + \operatorname{ch} x). \tag{10}$$

Résoudre les équations intégrales :

783. $\varphi(x) = \sin x + \int_0^x (x-t)\,\varphi(t)\,dt.$

784. $\varphi(x) = x + \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2\,\varphi(t)\,dt.$

785. $\varphi(x) = x + \int_0^x \sin(x-t)\,\varphi(t)\,dt.$

786. $\varphi(x) = \cos x + \int_0^x e^{x-t}\varphi(t)\,dt.$

787. $\varphi(x) = 1 + x + \int_0^x \cos(x-t)\,\varphi(t)\,dt.$

788. $\varphi(x)=\frac{x^2}{2}+\int_0^x (x-t)\,e^{-(t-x)}\,\varphi(t)\,dt.$

789. $\varphi(x)=e^{-x}+\frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2\varphi(t)\,dt.$

790. $\varphi(x)=x+2\int_0^x [(x-t)-\sin(x-t)]\,\varphi(t)\,dt.$

791. $\varphi(x)=\sin x+2\int_0^x \cos(x-t)\,\varphi(t)\,dt.$

792. $\varphi(x)=1-2x-4x^2+\int_0^x [3+6(x-t)-4(x-t)^2]\,\varphi(t)\,dt.$

793. $\varphi(x)=1+\frac{1}{2}\int_0^x \sin 2(x-t)\,\varphi(t)\,dt.$

794. $\varphi(x)=e^x-2\int_0^x \cos(x-t)\,\varphi(t)\,dt.$

795. $\varphi(x)=1+\frac{1}{6}\int_0^x (x-t)^3\varphi(t)\,dt.$

796. $\varphi(x)=x-\int_0^x \operatorname{sh}(x-t)\,\varphi(t)\,dt.$

797. $\varphi(x)=\operatorname{sh} x-\int_0^x \operatorname{ch}(x-t)\,\varphi(t)\,dt.$

D'une façon analogue, on arrive à résoudre les équations intégrales de Volterra de première espèce, dont le noyau $K(x, t)$ ne dépend que de la différence $x-t$, c'est-à-dire les équations de type

$$\int_0^x K(x-t)\,\varphi(t)\,dt=f(x), \tag{11}$$

où $f(x)$ est la fonction connue, $\varphi(x)$ étant la fonction que l'on cherche. Dans ce cas, on pose $K(x, x)\neq 0$.

Soient $F(p) \risingdotseq f(x)$, $L(p) \risingdotseq K(x)$, $\Phi(p) \risingdotseq (x)$. En appliquant aux deux membres de l'équation (1) la transformation de Laplace et en utilisant le théorème de convolution, on obtient

$$L(p)\cdot\Phi(p) = F(p),$$

d'où

$$\Phi(p)=\frac{F(p)}{L(p)}, \quad L(p)\neq 0.$$

L'original de la fonction $\Phi(p)$ sert de solution $\varphi(x)$ de l'équation (11).

798. $\int_0^x e^{x-t}\varphi(t)\,dt=x.$ 799. $\int_0^x J_0(x-t)\,\varphi(t)\,dt=\sin x.$

800. $\int_0^x \cos(x-t)\,\varphi(t)\,dt=\sin x.$ 801. $\int_0^x e^{x-t}\varphi(t)\,dt=\sin x.$

802. $\int_0^x \cos(x-t)\,\varphi(t)\,dt=x+x^2.$ 803. $\int_0^x e^{2(x-t)}\varphi(t)\,dt=x^2e^x.$

804. $\int_0^x \operatorname{ch}(x-t)\,\varphi(t)\,dt=\operatorname{sh} x.$ 805. $\int_0^x \operatorname{ch}(x-t)\,\varphi(t)\,dt=x.$

Appliquons maintenant la méthode de résolution des équations (4), (11) examinée ci-avant aux systèmes d'équations de Volterra de type

$$\varphi_i(x)=f_i(x)+\sum_{k=1}^{s}\int_0^x K_{ik}(x-t)\,\varphi_k(t)\,dt \quad (i=1, 2, \ldots, s). \tag{12}$$

Si l'on effectue la transformation de Laplace dans les deux membres de l'équation (12), on obtient

$$\Phi_i(p)=F_i(p)+\sum_{k=1}^{s} L_{ik}(p)\,\Phi_k(p) \quad (i=1, 2, \ldots, s).$$

En résolvant ce système d'équations, qui est un système linéaire par rapport à $\Phi_i(p)$, on trouve $\Phi_i(p)$ $(i=1, 2, \ldots, s)$ dont les originaux représentent justement la solution du système d'équations intégrales initial (12).

EXEMPLE 2. Résoudre le système d'équations intégrales

$$\begin{cases} \varphi_1(x)=x+\int_0^x e^{-(x-t)}\varphi_1(t)\,dt+\int_0^x (x-t)\,\varphi_2(t)\,dt, \\ \varphi_2(x)=1+\int_0^x \operatorname{sh}(x-t)\,\varphi_1(t)\,dt-\int_0^x e^{(x-t)}\varphi_2(t)\,dt. \end{cases}$$

SOLUTION. En passant aux images et en faisant appel au théorème de convolution, on obtient ($\Phi_1(p)\risingdotseq\varphi_1(x)$, $\Phi_2(p)\risingdotseq\varphi_2(x)$)

$$\begin{cases} \Phi_1(p)=\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p+1}\,\Phi_1(p)+\frac{1}{p^2}\,\Phi_2(p), \\ \Phi_2(p)=\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2-1}\,\Phi_1(p)-\frac{1}{p-1}\,\Phi_2(p), \end{cases}$$

d'où

$$\Phi_1(p)=\frac{p^2+p-1}{p(p-1)(p^2+1)}, \qquad \Phi_2(p)=\frac{p^3-p^2+1}{(p-1)(p+1)(p^2+1)}.$$

On trouve les originaux de $\Phi_1(p)$ et de $\Phi_2(p)$:

$$\varphi_1(x)=1+\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{2}\sin x-\frac{3}{2}\cos x,$$

$$\varphi_2(x)=\frac{1}{2}(\cos x+\operatorname{ch} x)-\sin x.$$

Le système de fonctions $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$ est la solution du système d'équations intégrales de départ.

Résoudre les systèmes d'équations intégrales suivants:

806. $$\begin{cases} \varphi_1(x)=1-2\int_0^x e^{2(x-t)}\varphi_1(t)\,dt+\int_0^x \varphi_2(t)\,dt, \\ \varphi_2(x)=4x-\int_0^x \varphi_1(t)\,dt+4\int_0^x (x-t)\,\varphi_2(t)\,dt. \end{cases}$$

807. $$\begin{cases} \varphi_1(x)=e^x+\int_0^x \varphi_1(t)\,dt-\int_0^x e^{(x-t)}\varphi_2(t)\,dt, \\ \varphi_2(x)=-x-\int_0^x (x-t)\,\varphi_1(t)\,dt+\int_0^x \varphi_2(t)\,dt. \end{cases}$$

808. $$\begin{cases} \varphi_1(x)=x+\int_0^x \varphi_1(t)\,dt+\int_0^x (x-t)\,\varphi_2(t)\,dt, \\ \varphi_2(x)=1-\int_0^x e^{(x-t)}\varphi_1(t)\,dt+\int_0^x \varphi_2(t)\,dt. \end{cases}$$

809. $$\begin{cases} \varphi_1(x)=e^x-\int_0^x \varphi_1(t)\,dt+4\int_0^x e^{(x-t)}\varphi_2(t)\,dt, \\ \varphi_2(x)=1-\int_0^x e^{-(x-t)}\varphi_1(t)\,dt+\int_0^x \varphi_2(t)\,dt. \end{cases}$$

810. $$\begin{cases} \varphi_1(x)=2x-\int_0^x (x-t)\,\varphi_1(t)\,dt+\int_0^x \varphi_2(t)\,dt, \\ \varphi_2(x)=-2-4\int_0^x \varphi_1(t)\,dt+3\int_0^x (x-t)\,\varphi_2(t)\,dt. \end{cases}$$

811. $$\begin{cases} \varphi_1(x) = 2 - \int\limits_0^x (x-t)\,\varphi_1(t)\,dt - 4\int\limits_0^x \varphi_2(t)\,dt, \\ \varphi_2(x) = 1 - \int\limits_0^x \varphi_1(t)\,dt - \int\limits_0^x (x-t)\,\varphi_2(t)\,dt. \end{cases}$$

§ 19. Equations différentielles à argument retardé

Certains problèmes techniques sont liés à la résolution des équations différentielles dont la fonction inconnue figure à valeurs différentes de l'argument. Par exemple,

$$\dot{x}(t) = \varphi(t,\ x(t),\ x(t-\tau(t))), \tag{1}$$

$$\dot{x}(t) = \varphi(t,\ x(t),\ x(t-\tau(t)),\ \dot{x}(t-\tau(t))), \tag{2}$$

$$\ddot{x}(t) = \varphi(t,\ x(t),\ \dot{x}(t),\ x(t-\tau_1(t)),\ \dot{x}(t-\tau_2(t))). \tag{3}$$

Ces équations sont appelées *équations différentielles à argument dévié.* Si $\tau_i(t)$ sont constants, on a affaire aux ainsi appelées *équations différentielles aux différences.* Si $\tau_i > 0$ et que la dérivée d'ordre supérieur ne figure dans l'équation différentielle aux différences qu'à une seule valeur de l'argument, qui n'est pas inférieure à toutes les autres valeurs des arguments des fonctions et des dérivées contenues par l'équation, il s'agit d'une *équation différentielle à argument retardé.*

Soit donnée une équation différentielle à argument retardé et à coefficients constants de la forme

$$x^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{(k)}(t-\tau_k) + f(t), \tag{4}$$

où $a_k = \text{const}$, $\tau_k = \text{const} \geqslant 0$ $(0 < t < +\infty)$. Pour simplifier l'exposé, nous allons utiliser des conditions initiales nulles

$$x(0) = x'(0) = \ldots = x^{(n-1)}(0) = 0. \tag{5}$$

On suppose en outre que

$$x(t) = x'(t) = \ldots = x^{(n-1)}(t) \equiv 0 \qquad \text{pour} \qquad t < 0.$$

En appliquant aux deux membres de l'équation (4) la transformation de Laplace et en faisant appel au théorème de retardement (cf. § 14), on obtient l'équation opératorielle suivante pour $X(p) \risingdotseq x(t)$:

$$p^n X(p) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k p^k X(p)\, e^{-\tau_k p} + F(p), \qquad \text{où} \qquad F(p) \risingdotseq f(t), \tag{6}$$

d'où

$$X(p) = \frac{F(p)}{p^n - \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k p^k e^{-\tau_k p}}. \tag{7}$$

En trouvant $x(t)$, qui est l'original de $X(p)$ définie par la formule (7), on obtient la solution de l'équation (4) qui satisfait aux conditions initiales (5).

EXEMPLE 1. Résoudre l'équation

$$x'(t) = x(t-1) + 1, \qquad x(0) = 0.$$

SOLUTION. En passant aux images, on a

$$pX(p)=X(p)e^{-p}+\frac{1}{p},$$

d'où

$$X(p)=\frac{1}{p}\,\frac{1}{p-e^{-p}}=\frac{1}{p^2}\,\frac{1}{1-\frac{e^{-p}}{p}}=$$

$$=\frac{1}{p^2}\left(1+\frac{e^{-p}}{p}+\frac{e^{-2p}}{p^2}+\ldots+\frac{e^{-np}}{p^n}+\ldots\right).$$

Pour $x(t)$, on obtient

$$x(t)=t\eta(t)+\frac{1}{2!}(t-1)^2\,\eta(t-1)+\ldots$$

$$\ldots+\frac{1}{(n+1)!}(t-n)^{n+1}\,\eta(t-n)+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(t-k)^{k+1}}{(k+1)!}\,\eta(t-k).$$

Résoudre les équations suivantes:

812. $x''(t)-x(t-1)=t,\quad x(0)=x'(0)=0.$

813. $x''(t)-2x'(t-1)=t,\quad x(0)=x'(0)=0.$

814. $x''(t)=2x'(t-1)-x(t-2)+1,\quad x(0)=x'(0)=0.$

815. $x''(t)+2x'(t-2)+x(t-4)=t,\quad x(0)=x'(0)=0.$

Dans le cas des processus à effets ultérieurs décrits par des équations différentielles à argument retardé, on rencontre souvent des problèmes posés comme suit:

Trouver la solution $x(t)$ d'une équation pour $t\geqslant t_0$, la fonction $x(t)$ étant donnée pour tous les $t\leqslant t_0$ pour lesquels les valeurs de $x(t)$ influent sur les valeurs successives de la solution si $t\geqslant 0$.

On propose, par exemple, de trouver, pour $t\geqslant t_0$, la solution continue $x(t)$ de l'équation

$$x(t)=f(t,\ x(t),\ x(t-\tau)),\quad \tau>0=\text{const},$$

si l'on sait que $x(t)=\varphi(t)$ pour $t_0-\tau\leqslant t\leqslant t_0$.

Ici $\varphi(t)$ est une fonction continue donnée appelée *fonction de départ*. Le segment $[t_0-\tau,\ t_0]$ sur lequel est donnée la fonction $\varphi(t)$ est appelé *ensemble de départ*.

A l'aide de la transformation de Laplace, on peut aussi entreprendre la recherche de la solution de l'équation linéaire (4) à coefficients et retardement constants dans le cas où la fonction de départ n'est pas identiquement nulle. Montrons ce qui vient d'être dit à l'aide de l'exemple ci-après.

EXEMPLE 2. Résoudre l'équation

$$x'(t)=x(t-1),\qquad \varphi(t)\equiv 1,\qquad -1\leqslant t\leqslant 0.$$

SOLUTION.

$$x(t)\doteqdot X(p),\qquad x'(t)\doteqdot pX(p)-x(0)=pX(p)-1.$$

En appliquant la transformation de Laplace aux deux membres de l'équation initiale, on trouve

$$pX(p)-1=\int_0^{\infty}e^{-pt}\,x(t-1)\,dt.$$

Le changement de variable $t-1=z$ donne

$$\int_0^\infty e^{-pt}x(t-1)\,dt=\int_{-1}^\infty e^{-p(z+1)}x(z)\,dz=e^{-p}\int_{-1}^0 e^{-pz}x(z)\,dz+e^{-p}\int_0^\infty e^{-pz}x(z)\,dz=$$

$$=e^{-p}\frac{e^{-pz}}{-p}\Big|_{z=-1}^{z=0}+e^{-p}X(p),$$

car $x(z)=1$ pour $-1\leqslant z\leqslant 0$. Finalement, on a

$$pX(p)-1=\frac{1-e^{-p}}{p}+e^{-p}X(p).$$

D'où

$$X(p)=\frac{1}{p-e^{-p}}+\frac{1-e^{-p}}{p(p-e^{-p})}=\frac{1}{p\left(1-\frac{e^{-p}}{p}\right)}+\frac{1-e^{-p}}{p^2\left(1-\frac{e^{-p}}{p}\right)}=$$

$$=\frac{1}{p}\left(1+\frac{e^{-p}}{p}+\frac{e^{-2p}}{p^2}+\ldots+\frac{e^{-kp}}{p^k}+\ldots\right)+$$

$$+\frac{(1-e^{-p})}{p^2}\left(1+\frac{e^{-p}}{p}+\ldots+\frac{e^{-kp}}{p^k}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\frac{e^{-p}}{p^3}+\ldots+\frac{e^{-kp}}{p^{k+2}}+\ldots$$

En trouvant l'original de $X(p)$, on obtient la solution de l'équation initiale

$$x(t)=(1+t)\,\eta(t)+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(t-k+1)^k}{k!}\,\eta(t-k+1).$$

Résoudre les équations suivantes:

816. $x'(t)=x(t-1),\quad \varphi(t)=t,\quad -1\leqslant t\leqslant 0.$

817. $x'(t)=x(t-1)+t,\quad \varphi(t)\equiv 1,\quad -1\leqslant t\leqslant 0.$

818. $x'(t)+x\left(t-\frac{\pi}{2}\right)=0,\quad \varphi(t)=\cos t,\quad -\frac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant 0.$

§ 20. Résolution de certains problèmes de physique mathématique

Nous allons nous limiter au cas où la fonction inconnue u dépend de deux variables indépendantes x et t. La variable x sera considérée comme étant une coordonnée spatiale, tandis que la variable t désignera le temps.

Examinons, par exemple, l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t) \tag{1}$$

(a^2 est une constante).

Examinons le premier problème aux limites concernant l'équation (1): on se propose de trouver la solution $u(x,t)$ de l'équation différentielle (1) pour $0\leqslant x\leqslant l$ et $t\geqslant 0$ qui vérifie la condition initiale

$$u(x,0)=\varphi(x) \tag{2}$$

et les conditions aux limites

$$u(0,\ t)=\psi_1(t), \qquad u(l,\ t)=\psi_2(t). \tag{3}$$

Supposons que $u(x,\ t)$, $\dfrac{\partial^2 u(x,\ t)}{\partial x^2}$ et $f(x,\ t)$ considérées en tant que fonctions de t sont des originaux. Désignons par

$$U(p,\ x)=\int\limits_0^\infty u(x,\ t)\,e^{-pt}\,dt \tag{4}$$

l'image de la fonction $u(x,\ t)$. Alors

$$\frac{\partial u}{\partial x}\fallingdotseq\int\limits_1^\infty \frac{\partial u}{\partial x}\,e^{-pt}\,dt=\frac{dU}{dx}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\fallingdotseq\frac{d^2U}{dx^2}. \tag{5}$$

D'après la règle de dérivation des originaux et compte tenu de la condition initiale (2), on obtient

$$\frac{\partial u}{\partial t}\fallingdotseq pU-\varphi(x). \tag{6}$$

Supposons que $\psi_1(t)$ et $\psi_2(t)$ sont des originaux et que

$$\psi_1(t)\fallingdotseq\Psi_1(p), \qquad \psi_2(t)\fallingdotseq\Psi_2(p). \tag{7}$$

Alors les conditions aux limites (3) donnent

$$U|_{x=0}=\Psi_1(p), \qquad U|_{x=l}=\Psi_2(p). \tag{8}$$

La méthode opérationnelle ramène de cette façon la résolution du problème (1), (2), (3) à la résolution de l'équation différentielle ordinaire

$$a^2\frac{d^2U}{dx^2}-pU+\varphi(x)+F(x,\ p)=0 \tag{9}$$

à conditions aux limites (8), où $F(x,\ p)\fallingdotseq f(x,\ t)$. Après avoir résolu le problème (9), (8) et effectué l'inversion correspondante de la solution obtenue, on trouve la fonction $u(x,\ t)$ qui représente la solution du problème (1), (2), (3). D'une façon analogue, on arrive à résoudre les autres problèmes aux limites posés pour l'équation de la chaleur, de même que les problèmes aux limites concernant l'équation des cordes vibrantes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,\ t), \tag{10}$$

l'équation des télégraphistes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(\alpha+\beta)\frac{\partial u}{\partial t}+\alpha\beta u=0 \tag{11}$$

et d'autres équations de type plus général.

PROBLÈME. Les extrémités d'une corde $x=0$ et $x=l$ sont fixés. L'écart initial est donné par l'égalité $u(x,\ 0)=A\sin\dfrac{\pi x}{l}$ $(0\leqslant x\leqslant l)$. La vitesse initiale est nulle. Trouver les écarts $u(x,\ t)$ pour $t>0$.

SOLUTION. Le problème posé se ramène à la résolution de l'équation différentielle

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0 \tag{12}$$

à conditions initiales

$$u(x,0)=A\sin\frac{\pi x}{l},\qquad \frac{\partial u(x,0)}{t}=0, \tag{13}$$

et à conditions aux limites

$$u(0,t)=u(l,t)=0. \tag{14}$$

En passant aux images, on obtient

$$\frac{d^2U}{dx^2}-\frac{p^2}{a^2}U=-\frac{pA}{a^2}\sin\frac{\pi x}{l}, \tag{15}$$

$$U|_{x=0}=U|_{x=l}=0. \tag{16}$$

En résolvant l'équation (15), on trouve

$$U(x,p)=C_1e^{px/a}+C_2e^{-px/a}+\frac{Ap}{p^2+\frac{a^2\pi^2}{l^2}}\sin\frac{\pi x}{l}.$$

Compte tenu des conditions aux limites (16), on a

$$U(x,p)=\frac{Ap}{p^2+\frac{a^2\pi^2}{l^2}}\sin\frac{\pi x}{l}.$$

L'original de $U(x, p)$ est la fonction

$$u(x,t)=A\cos\frac{\pi at}{l}\sin\frac{\pi x}{l},$$

qui représente la solution du problème posé.

Résoudre les problèmes suivants:

819. $\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $(x>0,\ t>0)$, $u(0,\ t)=u_0$, $u(x,\ 0)=0$.

820. $\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $(x>0,\ t>0)$, $u(0,\ t)=0$, $u(x,\ 0)=u_1$.

821. $\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $(x>0,\ t>0)$, $u(0,\ t)=a\cos\omega t$, $u(x,\ 0)=0$.

822. $\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $(x>0,\ t>0)$, $u(0,\ t)=a\sin\omega t$, $u(x,\ 0)=0$.

823. $\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $(x>0,\ t>0)$, $u(0,\ t)=\varphi(t)$, $u(x,\ 0)=0$.

824. Trouver la répartition de la température dans une tige $0\leqslant x\leqslant l$ compte tenu des conditions suivantes: le flux de chaleur ne traverse pas l'extrémité $x=0$; l'autre extrémité $x=l$ conserve invariable sa température u_1; la température initiale de la tige $u_0=\text{const}$.

825. Trouver la répartition de la température dans une tige semi-limitée avec rayonnement de la chaleur par son extrémité gauche dans un milieu de température nulle si l'on sait que la température initiale de la tige $u_0 = \text{const}$.

826. Une tige de longueur l dont l'extrémité $x = 0$ est fixée se trouve en état de repos. Au moment $t = 0$, une force F est appliquée (par unité de surface) à l'extrémité libre de la tige suivant son axe. Déterminer les vibrations de la tige.

827. Une tige est suspendue verticalement étant coincée de façon que les écarts de tous ces points sont nuls. Au moment $t = 0$, la tige est libérée ne restant fixée que par son point supérieur. Trouver la loi des vibrations de la tige.

828. Résoudre l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + bx(x-l)$$

si les conditions initiales et aux limites sont nulles

$$u\,|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad u(0, t) = u(l, t) = 0.$$

829. Une corde homogène dont les extrémités $x = 0$ et $x = l$ sont fixées prend au moment initial la forme d'une parabole symétrique par rapport à la perpendiculaire qui passe par le point $x = l/2$. Déterminer les écarts des points de la corde par rapport à la position rectiligne d'équilibre en supposant que les vitesses initiales sont nulles.

§ 21. Transformation de Laplace discrète

Soit une fonction à valeurs complexes $f(t)$ d'un argument réel t définie pour $t \geqslant 0$.

Considérons la suite $\{f(n)\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ qui sera désignée tout court $f(n)$ et appelée *fonction discrète*. Pour la fonction $f(n)$, la fonction $f(t)$ est une *fonction génératrice*. De cette façon, l'argument de la fonction discrète ne prend que des valeurs entières, de plus la fonction discrète s'annule pour les valeurs négatives de l'argument.

Nous allons appeler *transformation de Laplace discrète* de la fonction discrète $f(n)$ la fonction $F^*(p)$ d'un argument complexe $p = s + i\sigma$ définie par l'égalité

$$F^*(p) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-np} f(n); \tag{1}$$

on suppose que la série figurant au second membre est convergente.

La fonction $f(n)$ sera considérée comme étant un original ayant pour image la fonction $F^*(p)$, et l'on écrira

$$F^*(p) \risingdotseq f(n) \quad \text{ou} \quad f(n) \risingdotseq F^*(p).$$

La valeur de $\operatorname{Re} p = s^*$ pour laquelle, si $\operatorname{Re} p = s > s^*$, la série (1) converge, alors que, si $s < s^*$, cette série diverge est appelée ***abscisse de convergence.*** La fonction $F^*(p)$ est une fonction périodique de période $2\pi i$ analytique dans le demi-plan $\operatorname{Re} p > s^*$.

Si la fonction discrète $f(n)$ vérifie la condition

$$|f(n)| \leqslant Me^{\lambda_0 n}, \tag{2}$$

cela signifie que l'abscisse de convergence $s^* > \lambda_0$ et, par conséquent, que l'image d'une fonction pareille existe. Généralement parlant, toute fonction $f(t)$, qui est un original pour la transformation de Laplace habituelle, engendre une fonction discrète $f(n)$ pour laquelle est définie la transformation de Laplace discrète $F^*(p)$.

EXEMPLE 1. En faisant appel à la définition donnée ci-dessus, trouver l'image de la fonction

$$f(n) = e^{-n}.$$

SOLUTION. Il est évident que cette fonction satisfait à la condition (2) pour $\lambda_0 = 1$ et $M > 1$ arbitraire. Cela veut dire que son image existe. D'après la formule (1), on trouve

$$F^*(p) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-pn} e^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(1+p)n} = \frac{1}{1-e^{-(1+p)}} \quad (\mathrm{Re}\ p > -1). \tag{3}$$

Remarquons que la fonction discrète $f(n) = e^{n^2}$ n'a pas d'image, car son abscisse de convergence s^* est égale à l'infini.

En utilisant la définition formulée, trouver les images des fonctions suivantes:

830. $f(n) = \eta(n)$, où $\eta(n) = \begin{cases} 1 & \text{pour } n > 0, \\ 0 & \text{pour } n < 0. \end{cases}$

831. $f(n) = n$. **832.** $f(n) = e^{\alpha n}$.

833. $f(n) = a^n$ $(a > 0,\ a \neq 1)$.

PROPRIÉTÉS PRINCIPALES DE LA TRANSFORMATION DE LAPLACE DISCRÈTE

I. PROPRIÉTÉ DE LINÉARITÉ. Pour n'importe quelles constantes complexes α et β

$$\alpha f(n) + \beta g(n) \risingdotseq \alpha F^*(p) + \beta G^*(p).$$

(Ici et dans ce qui suit, $f(n) \risingdotseq F^*(p)$, $g(n) \risingdotseq G^*(p)$.)

EXEMPLE 2. Trouver l'image de la fonction $f(n) = \sin n$.

SOLUTION. D'après les formules d'Euler,

$$\sin n = \frac{e^{in} - e^{-in}}{2i} = \frac{1}{2i} e^{in} - \frac{1}{2i} e^{-in}.$$

On a

$$e^{in} \risingdotseq \sum_{n=0}^{\infty} e^{-np} e^{in} = \frac{1}{1-e^{-(p-i)}}, \qquad e^{-in} \risingdotseq \frac{1}{1-e^{-(p+i)}}.$$

Conformément à la propriété de linéarité,

$$\sin n \risingdotseq \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{1-e^{-(p-i)}} - \frac{1}{1-e^{-(p+i)}} \right) = \frac{e^p \sin 1}{e^{2p} - 2e^p \cos 1 + 1}.$$

Trouver les images des fonctions suivantes:

834. $f(n) = \cos n$. **835.** $f(n) = \sin \alpha n$ ($\alpha = \text{const}$).

836. $f(p) = \text{sh}\, n$. **837.** $f(n) = e^n - 2e^{n/2}$.

838. $f(n) \doteq \cos^2 n$.

II. THÉORÈMES D'AVANCEMENT ET DE RETARDEMENT. *Soit $f(n) \doteq F^*(p)$ et soit k un entier positif. Alors*

$$f(n+k) \doteq e^{kp}\left[F^*(p) - \sum_{m=0}^{k-1} e^{-mp} f(m)\right]. \tag{4}$$

En particulier, si $f(0) = f(1) = \ldots = f(k-1) = 0$,

$$f(n+k) \doteq e^{kp} F^*(p). \tag{5}$$

D'une façon analogue,

$$f(n-k) \doteq e^{-kp} F^*(p) \quad (f(n-k) \equiv 0 \text{ pour } n < k). \tag{6}$$

EXEMPLE 3. Trouver l'image de la fonction $f(n) = e^{n-2}$ (pour $n < 2$, $f(n) \equiv 0$).

SOLUTION. On a

$$e^n \doteq \frac{1}{1 - e^{1-p}} = \frac{e^p}{e^p - e}.$$

D'après le théorème de retardement, de (6) on trouve

$$e^{n-2} \doteq e^{-2p} \frac{e^p}{e^p - e} = \frac{1}{e^p(e^p - e)}.$$

Trouver les images des fonctions suivantes:

839. $f(n) = \eta(n-k)$. **840.** $f(n) = e^{\alpha(n+3)}$.

841. $f(n) = \text{sh}\, 2(n-1) \cdot \eta(n-1)$. **842.** $f(n) = (n+2)^2$.

III. THÉORÈME DE TRANSLATION. *Si $F^*(p) \doteq f(n)$, pour tout p_0 complexe,*

$$F^*(p - p_0) \doteq e^{p_0 n} f(n). \tag{7}$$

EXEMPLE 4. Trouver l'image de la fonction $f(n) = ne^{2n}$.

SOLUTION. On a

$$n \doteq \frac{e^{-p}}{(1 - e^{-p})^2}.$$

D'après le théorème de translation, on obtient ($p_0 = 2$)

$$e^{2n} n \doteq \frac{e^{-(p-2)}}{[1 - e^{-(p-2)}]^2}.$$

Trouver les images des fonctions suivantes:

843. $f(n) = e^{-n} \sin 2n$. **844.** $f(n) = n^2 e^{2n}$.

845. $f(n) = e^{3n}\, \text{ch}\, n$.

IV. DÉRIVATION DE L'IMAGE. La dérivation de l'image se ramène à la multiplication de l'original par $-n$:

$$\frac{d}{dp}\{F^*(p)\} \doteq -nf(n). \tag{8}$$

Généralement,

$$\frac{d^k}{dp^k}\{F^*(p)\} \risingdotseq (-1)^k n^k f(n). \tag{9}$$

EXEMPLE 5. Trouver l'image de la fonction $f(n) = ne^n$.
SOLUTION. On a

$$e^n \risingdotseq \frac{e^p}{e^p - e}.$$

D'après le théorème de dérivation de l'image, on obtient

$$ne^n \risingdotseq -\frac{d}{dp}\left(\frac{e^p}{e^p-e}\right) = \frac{e^{p+1}}{(e^p-e)^2}.$$

Trouver les images des fonctions suivantes:

846. $f(n) = n^2e^n$. 847. $f(n) = n^2$. 848. $f(n) = n \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$.

V. THÉORÈME D'INTÉGRATION DE L'IMAGE. *Admettons que la fonction discrète $f(n)$ satisfasse aux conditions*

$$f(0)=0, \left.\frac{f(t)}{t}\right|_{t=0} = \lim_{t\to+0}\frac{f(t)}{t} = 0. \tag{10}$$

Alors

$$\frac{f(n)}{n} \risingdotseq \int_p^\infty F^*(p)\,dp, \tag{11}$$

ce qui signifie que la division de l'original par n correspond à l'intégration de l'image dans les limites de p à ∞.

REMARQUES. a) Pour $f(0) \neq 0$, l'intégrale figurant au second membre de (11) diverge, ce qui indique que le théorème d'intégration de l'image ne sera plus valable.

b) Si

$$\left.\frac{f(t)}{t}\right|_{t=0} = \lim_{t\to+0}\frac{f(t)}{t} = a \neq 0,$$

alors

$$\frac{f(n)}{n} \risingdotseq a + \int_p^\infty F^*(p)\,dp. \tag{12}$$

c) Si pour $m=1, 2, \ldots, k$ les conditions

$$\lim_{t\to+0}\frac{f(t)}{t^m} = 0$$

sont vérifiées, alors

$$\frac{f(n)}{n^k} \risingdotseq \underbrace{\int_p^\infty \ldots \int_p^\infty}_{k} F^*(p)\,dp\ldots dp, \tag{13}$$

donc la division de l'original par n^k correspond à une intégration de l'image de p à ∞ répétée k fois.

EXEMPLE 6. Trouver l'image de la fonction discrète $\frac{e^n-1-n}{n}$.
SOLUTION. Soit $f(n)=e^n-1-n$.
Voyons si les conditions (10) sont vérifiées. On a

$$f(0)=0,$$

$$\lim_{t\to+0}\frac{f(t)}{t}=\lim_{t\to+0}\frac{e^t-1-t}{t}=\lim_{t\to+0}\left(\frac{e^t-1}{t}-1\right)=1-1=0.$$

On trouve l'image de la fonction

$$e^n-1-n\;\risingdotseq\;\frac{e^p}{e^p-e}-\frac{e^p}{e^p-1}-\frac{e^p}{(e^p-1)^2}.$$

Etant donné que les conditions (10) sont satisfaites, on a

$$\frac{e^n-1-n}{n}\;\risingdotseq\;\int_p^\infty\left[\frac{e^p}{e^p-e}-\frac{e^p}{e^p-1}-\frac{e^p}{(e^p-1)^2}\right]dp=$$

$$=\left[\ln(e^p-e)-\ln(e^p-1)+\frac{1}{e^p+1}\right]\Bigg|_p^\infty=$$

$$=\left[\ln\frac{e^p-e}{e^p-1}+\frac{1}{e^p-1}\right]\Bigg|_p^\infty=\ln\frac{e^p-1}{e^p-e}-\frac{1}{e^p-1}.$$

EXEMPLE 7. Trouver l'image de la fonction discrète $\frac{\operatorname{sh}\alpha n}{n}$ $(\alpha\neq 0)$.
SOLUTION. Posons $f(n)=\operatorname{sh}\alpha n$. On a

$$f(0)=0;\qquad \frac{f(t)}{t}\Big|_{t=0}=\lim_{t\to+0}\frac{\operatorname{sh}\alpha t}{t}=\alpha\neq 0.$$

L'image de la fonction $f(n)$ sera

$$\operatorname{sh}\alpha n\;\risingdotseq\;\frac{1}{2}\left(\frac{e^p}{e^p-e^\alpha}-\frac{e^p}{e^p-e^{-\alpha}}\right).$$

Trouvons maintenant l'image de la fonction donnée en utilisant la relation (12);

$$\frac{\operatorname{sh}\alpha n}{n}\;\risingdotseq\;\alpha+\frac{1}{2}\int_p^\infty\frac{e^p}{e^p-e^\alpha}-\frac{e^p}{e^p-e^{-\alpha}}\Big)\,dp=$$

$$=\alpha+\frac{1}{2}\left[\ln(e^p-e^\alpha)-\ln(e^p-e^{-\alpha})\right]\Big|_p^\infty=$$

$$=\alpha+\frac{1}{2}\ln\frac{e^p-e^\alpha}{e^p-e^{-\alpha}}\Bigg|_p^\infty=\alpha+\frac{1}{2}\ln\frac{e^p-e^{-\alpha}}{e^p-e^\alpha}.$$

Trouver les images des fonctions suivantes:

849. $\frac{a^n-1}{n}$ $(a>0,\ a\neq 1)$. **850.** $\frac{\sin\alpha n}{n}$ $(\alpha\neq 0)$.

851. $\frac{1-\cos\alpha n}{n}$. **852.** $\frac{n-\operatorname{sh}n}{n}$.

VI. DÉRIVATION PAR RAPPORT AU PARAMÈTRE. Supposons qu'un original et son image contiennent le paramètre ε qui est indépendant de n et de p et soit

$$F^*(p, \varepsilon) \doteq f(n, \varepsilon).$$

Alors

$$\frac{\partial F^*(p, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \doteq \frac{\partial f(n, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}, \tag{14}$$

ce qui signifie que la dérivée de l'image par rapport à ε est l'image de la dérivée de l'original par rapport à ε. On admet que toutes ces dérivées existent et que $\frac{\partial f(n, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}$ représente l'original.

EXEMPLE 8. Trouver l'image de $ne^{\alpha n}$ (α est un nombre réel).

SOLUTION. On a $e^{\alpha n} \doteq \frac{e^p}{e^p - e^\alpha}$. Considérons α en tant que paramètre. D'après le théorème de dérivation par rapport au paramètre,

$$\left(\frac{e^p}{e^p - e^\alpha}\right)'_\alpha \doteq (e^{\alpha n})'_\alpha = ne^{\alpha n}.$$

D'où

$$ne^{\alpha n} \doteq \frac{e^p e^\alpha}{(e^p - e^\alpha)^2}.$$

Trouver les images des fonctions suivantes:

853. $f(n) = n \cos \alpha n$. 854. $f(n) = n^2 \operatorname{sh} \alpha n$.

855. $f(n) = (n+2) \operatorname{ch} \alpha n$.

VII. INTÉGRATION PAR RAPPORT AU PARAMÈTRE. Si $f(n, \varepsilon) \doteq F^*(p, \varepsilon)$, où le paramètre ε est indépendant de n et de p ($\varepsilon_0 \leqslant \varepsilon \leqslant \lambda$), alors

$$\int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} f(n, \varepsilon)\, d\varepsilon \doteq \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} F^*(p, \varepsilon)\, d\varepsilon, \tag{15}$$

ce qui montre que l'intégration de l'original par rapport au paramètre ε correspond à l'intégration de l'image par rapport au paramètre ε.

EXEMPLE 9. Trouver l'image de la fonction discrète $\frac{1-\cos \varepsilon n}{n}$ à l'aide de l'intégration par rapport au paramètre.

SOLUTION. On a

$$\sin \varepsilon n \doteq \frac{e^p \sin \varepsilon}{e^{2p} - 2e^p \cos \varepsilon + 1}.$$

Intégrons le premier et le second membres de cette relation par rapport au paramètre ε dans les limites de $\varepsilon_0 = 0$ à ε:

$$\int_0^{\varepsilon} \sin \varepsilon n\, d\varepsilon \doteq \int_0^{\varepsilon} \frac{e^p \sin \varepsilon\, d\varepsilon}{e^{2p} - 2e^p \cos \varepsilon + 1}.$$

On obtient

$$\frac{1-\cos \varepsilon n}{n} \doteq \frac{1}{2} \ln (e^{2p}-2e^{p} \cos \varepsilon+1) \Big|_{0}^{\varepsilon}=$$

$$=\frac{1}{2} [\ln (e^{2p}-2e^{p} \cos \varepsilon+1)-\ln (e^{2p}-2e^{p}+1)].$$

Donc,

$$\frac{1-\cos \varepsilon n}{n} \doteq \frac{1}{2} \ln \frac{e^{2p}-2e^{p} \cos \varepsilon+1}{(e^{p}-1)^{2}}.$$

Au moyen de l'intégration par rapport au paramètre, trouver les images des fonctions suivantes:

856. $\frac{e^{\varepsilon n}-e^{\varepsilon_0 n}}{n}$. **857.** $\frac{\operatorname{ch} \varepsilon n-\operatorname{ch} n}{n}$.

858. $\frac{\sin \varepsilon n}{n}$. **859.** $\frac{\sin (\varepsilon-1) n \cdot \cos (\varepsilon+1) n}{n}$.

THÉORÈME DE MULTIPLICATION DES IMAGES. *Soient*

$$f_1 (n) \doteq F_1^* (p), \qquad f_2 (n) \doteq F_2^* (p).$$

Alors

$$F_1^* (p) \cdot F_2^* (p) \doteq \sum_{m=0}^{n} f_1 (n-m) f_2 (m)= \sum_{m=0}^{n} f_1 (m) f_2 (n-m). \qquad (16)$$

EXEMPLE 10. Trouver l'original correspondant à l'image

$$F^* (p)=\frac{e^{2p}}{(e^{p}-e) (e^{p}-e^{-1})}.$$

SOLUTION. L'image $F^* (p)$ peut être présentée sous la forme d'un produit de deux images

$$F_1^* (p)=\frac{e^{p}}{e^{p}-e} \doteq e^{n}, \qquad F_2^* (p)=\frac{e^{p}}{e^{p}-e^{-1}} \doteq e^{-n}.$$

D'après le théorème de multiplication,

$$F^* (p) \doteq \sum_{m=0}^{n} e^{-m} e^{n-m}=e^{n} \sum_{m=0}^{n} e^{-2m}=\frac{e^{n} \cdot e^{2}}{e^{2}-1}-\frac{e^{-n}}{e^{2}-1}.$$

En utilisant le théorème de multiplication, trouver les originaux des images suivantes:

860. $F^* (p)=\frac{e^{p}}{(e^{p}-1) (e^{p}-e)}$. **861.** $F^* (p)=\frac{e^{-p}}{(1-e^{-p})^{2}} \cdot \frac{e^{p}}{e^{p}-1}$.

862. $F^* (p)=\frac{e^{p}}{(e^{p}-1)^{2} (e^{p}-e)}$. **863.** $F^* (p)=\frac{e^{2p}}{(e^{p}-e^{2}) (e^{p}-1)}$.

IMAGE DES DIFFÉRENCES. On appelle *différence première* d'une fonction discrète $f (n)$ une grandeur désignée par le symbole $\Delta f (n)$ et définie par la relation

$$\Delta f (n) = f (n+1) - f (n). \qquad (17)$$

On appelle *différence seconde* $\Delta^2 f(n)$ une grandeur donnée par la relation

$$\Delta^2 f(n) = \Delta f(n+1) - \Delta f(n) \qquad (18)$$

ou, compte tenu de (17),

$$\Delta^2 f(n) = f(n+2) - 2f(n+1) + f(n). \qquad (19)$$

En général, une différence d'ordre k $\Delta^k f(n)$ est définie par la relation

$$\Delta^k f(n) = \Delta^{k-1} f(n+1) - \Delta^{k-1} f(n) \qquad (20)$$

ou

$$\Delta^k f(n) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j C_k^j f(n+k-j), \qquad (21)$$

où $C_k^j = \frac{k!}{j!\,(k-j)!}$ sont des coefficients binomiaux.

EXEMPLE 11. Trouver les différences pour la fonction $f(n) = 2n^2$.

SOLUTION. Par définition, la différence première sera

$$\Delta f(n) = 2(n+1)^2 - 2n^2 = 2(2n+1),$$

tandis que pour la différence seconde on aura

$$\Delta^2 f(n) = \Delta f(n+1) - \Delta f(n) = 2[2(n+1)+1] - 2(2n+1) = 4.$$

Il est évident que toutes les différences d'un ordre plus élevé seront nulles (comparer avec les dérivées de la fonction $f(t) = 2t^2$).

Trouver les différences d'ordre k pour les fonctions suivantes:

864. $f(n) = 3n + 2$. 865. $f(n) = e^{2n}$. 866. $f(n) = n^2 - n$.

Soit $f(n) \risingdotseq F^*(p)$. Alors

$$\Delta f(n) \risingdotseq (e^p - 1) F^*(p) - e^p f(0),$$

$$\Delta^2 f(n) \risingdotseq (e^p - 1)^2 F^*(p) - e^p (e^p - 1) f(0) - e^p \Delta f(0)$$

et ainsi de suite.

En général,

$$\Delta^k f(n) \risingdotseq (e^p - 1)^k F^*(p) - e^p \sum_{\nu=0}^{k-1} (e^p - 1)^{k-\nu-1} \Delta^\nu f(0), \qquad (22)$$

où l'on pose $\Delta^0 f(0) = f(0)$. De la relation (22) on trouve

$$F^*(p) = \frac{e^p}{e^p - 1} \sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{\Delta^\nu f(0)}{(e^p - 1)^\nu} + \frac{1}{(e^p - 1)^k} L_D\{\Delta^k f(n)\}, \qquad (23)$$

où $L_D\{\Delta^k f(n)\}$ est l'image de $\Delta^k f(n)$ au sens de la transformation de Laplace discrète.

Si, en particulier, $\Delta^\nu f(0) = (\nu = 0, 1, \ldots, k-1)$, ce qui équivaut à $f(0) = f(1) = \ldots = f(k-1) = 0$, la formule (22) se met sous une forme particulièrement simple

$$\Delta^k f(n) \risingdotseq (e^p - 1)^k F^*(p),$$

c'est-à-dire que la prise de la différence d'ordre k pour l'original correspond à la multiplication de l'image par $(e^p - 1)^k$.

EXEMPLE 12. Trouver l'image de la fonction $f(n) = n^2$.

$$\Delta f(n) = 2n + 1,$$
$$\Delta^2 f(n) = 2n + 3 - 2n - 1 = 2,$$
$$\Delta^k f(n) = 0 \quad (k > 2).$$

Ensuite, $f(0) = 0$, $\Delta f(0) = 1$, $\Delta^2 f(0) = 2$. Si l'on pose dans l'égalité (23) $k = 3$, on a

$$f(n) \doteq F^*(p) = \frac{e^p}{e^p-1}\sum_{\nu=0}^{2}\frac{\Delta^\nu f(0)}{(e^p-1)^\nu} = \frac{e^p}{e^p-1}\left(0+\frac{1}{e^p-1}+\frac{2}{(e^p-1)^2}\right) = \frac{e^p(e^p+1)}{(e^p-1)^3}.$$

Trouver les images des fonctions suivantes:

867. $f(n) = n^3$. 868. $f(n) = \frac{n(n-1)}{2!}$.

869. $f(n) = (n-k)^2\eta(n-k)$.

IMAGE D'UNE SOMME. Soit $f(n)$ une fonction discrète dont l'image est

$$f(n) \doteq F^*(p).$$

Considérons la somme

$$\sum_{m=0}^{n-1} f(m).$$

Alors

$$\sum_{m=0}^{n-1} f(m) \doteq \frac{F^*(p)}{e^p-1},$$

ce qui montre que la division de l'image par $e^p - 1$ correspond à la sommation des originaux.

En général, une sommation répétée k fois de l'original correspond à une division de l'image par $(e^p - 1)^k$.

EXEMPLE 13. En utilisant le théorème de l'image d'une somme, trouver la somme

$$\sum_{m=0}^{n-1} me^m.$$

SOLUTION. L'image de ne^n est égale à $\frac{e^{p+1}}{(e^p-e)^2}$. C'est pour cela qu'en vertu du théorème de l'image d'une somme,

$$\sum_{m=0}^{n-1} me^m \doteq \frac{e^{p+1}}{(e^p-e)^2(e^p-1)} =$$

$$=\frac{e}{(e-1)^2}\left[\frac{e^p}{e^p-1}-\frac{e^p}{e^p-e}+\frac{e-1}{e}\cdot\frac{e^{p+1}}{(e^p-e)^2}\right]\risingdotseq$$

$$\risingdotseq\frac{e}{(e-1)^2}\left[1-e^n+\frac{(e-1)\,ne^n}{e}\right].$$

Par conséquent,

$$\sum_{m=0}^{n-1} me^m=\frac{e\,(1-e^n)+(e-1)\,ne^n}{(e-1)^2}.$$

Trouver les sommes suivantes:

870. $\sum_{m=0}^{n-1} m^2$. **871.** $\sum_{m=0}^{n-1} m\cos m\alpha$.

872. $\sum_{m=0}^{n-1} m\,(m-1)$. **873.** $\sum_{m=0}^{n-1} e^m\cos m\alpha\ (n\geqslant 2)$.

FORMULE D'INVERSION. Soit une fonction discrète $f\,(n)$ qui a comme image la fonction $F^*\,(p)$ d'une variable complexe $p=\sigma+i\tau$. En vertu de sa périodicité $(F^*\,(p+2\pi i)=F^*\,(p))$, la fonction $F^*\,(p)$ est considérée dans la bande principale $-\pi<\operatorname{Im} p\leqslant\pi$.

Si l'image $F^*\,(p)$ est connue, l'original $f\,(n)$ peut être trouvé à l'aide de la formule d'inversion

$$f\,(n)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\pi}^{c+i\pi} F^*\,(p)\,e^{np}\,dp, \tag{24}$$

où c est un nombre réel quelconque supérieur à l'abscisse de convergence s^*.

Dans le cas où $F^*\,(p)$ se présente sous la forme d'une fraction propre rationnelle par rapport à e^p, on a

$$f\,(n)=\sum_{\nu}\operatorname*{Res}_{p_\nu}\,[F^*\,(p)\,e^{(n-1)p}], \tag{25}$$

où la somme est étendue à tous les pôles de la fonction $F^*\,(p)$ disposés dans la bande $-\pi<\operatorname{Im} p\leqslant\pi$ et sur sa frontière $\operatorname{Im} p=\pi$. Si p_ν est un pôle simple, alors

$$\operatorname*{Res}_{p_\nu}\,[F^*\,(p)\,e^{p(n-1)}]=\lim_{p\to p_\nu}\,[F^*\,(p)(e^p-e^{p_\nu})\cdot e^{p(n-1)}]; \tag{26}$$

mais si p_ν est un pôle d'ordre r_ν, alors

$$\operatorname*{Res}_{p_\nu}\,[F^*\,(p)\,e^{p(n-1)}]=$$

$$=\frac{1}{(r_\nu-1)!}\lim_{p\to p_\nu}\frac{d^{r_\nu-1}}{de^{p(r_\nu-1)}}\,[F^*\,(p)\,(e^p-e^{p_\nu})^{r_\nu}e^{p(n-1)}]. \tag{27}$$

EXEMPLE 14. A l'aide de la formule (25), trouver l'original qui correspond à l'image

$$F^*\,(p)=\frac{e^p}{e^{2p}-3e^p+2}.$$

SOLUTION. On trouve les zéros du dénominateur. On a $e^{2p} - 3e^p + 2 = 0$, d'où $e^p = 1$ et $e^p = 2$. Cela signifie que $p_1 = 0$ et $p_2 = \ln 2$ sont des zéros simples du dénominateur et, par conséquent, pour la fonction $F^*(p)$, ils sont des pôles simples disposés dans la bande principale. On trouve les résidus de la fonction $F^*(p)\,e^{p(n-1)}$ par rapport à ces pôles. On a

$$\operatorname*{Res}_{p=0}[F^*(p)\,e^{p(n-1)}] = \lim_{p\to 0}\left[\frac{e^p(e^p-1)}{(e^p-1)(e^p-2)}\,e^{p(n-1)}\right] = \lim_{p\to 0}\frac{e^{pn}}{e^p-2} = -1;$$

$$\operatorname*{Res}_{p=\ln 2}[F^*(p)\,e^{p(n-1)}] = \lim_{p\to\ln 2}\frac{e^p(e^p-e^{\ln 2})\,e^{p(n-1)}}{(e^p-1)(e^p-2)} =$$

$$= \lim_{p\to\ln 2}\frac{e^{pn}}{e^p-1} = \frac{e^{n\ln 2}}{e^{\ln 2}-1} = \frac{e^{\ln 2^n}}{2-1} = 2^n.$$

D'après la formule (25), on obtient

$$f(n) = -1 + 2^n.$$

EXEMPLE 15. En utilisant la formule d'inversion, trouver l'original correspondant à la fonction

$$F^*(p) = \frac{e^p}{e^{2p}-1}.$$

SOLUTION. La fonction

$$F^*(p) = \frac{e^p}{(e^p-1)(e^p+1)}$$

présente deux pôles simples aux points $p_1 = 0$, $p_2 = i\pi$ de la bande principale $-\pi < \operatorname{Im} p \leqslant \pi$. On trouve

$$\operatorname*{Res}_{p=0}[F^*(p)\,e^{p(n-1)}] = \lim_{p\to 0}\frac{e^p(e^p-1)\,e^{p(n-1)}}{(e^p-1)(e^p+1)} = \frac{1}{2},$$

$$\operatorname*{Res}_{p=i\pi}[F^*(p)\,e^{p(n-1)}] = \lim_{p\to i\pi}\frac{e^p(e^p-e^{i\pi})\,e^{p(n-1)}}{(e^p-1)(e^p+1)} =$$

$$= \lim_{p\to i\pi}\frac{e^{pn}}{e^p-1} = \frac{e^{i\pi n}}{e^{i\pi}-1} = \frac{(-1)^{n-1}}{2}.$$

D'après la formule (25), on obtient

$$f(n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(-1)^{n-1}.$$

Trouver les originaux correspondant aux images suivantes:

874. $F^*(p) = \dfrac{e^p}{(e^p-3)^2}$. **875.** $F^*(p) = \dfrac{e^p}{e^{2p}-7e^p+10}$.

876. $F^*(p) = \dfrac{e^p}{e^{2p}+1}$. **877.** $F^*(p) = \dfrac{e^{2p}}{e^{4p}-1}$.

878. $F^*(p) = \dfrac{e^p}{e^{2p}+2ae^p+2a^2}$ $(a > 0)$. **879.** $F^*(p) = \dfrac{e^p}{(e^p-e)^3}$.

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES À L'AIDE DE LA TRANSFORMATION DE LAPLACE DISCRÈTE

Une équation du type

$$F(n, f(n), f(n+1), \ldots, f(n+k)) = 0 \tag{28}$$

ou

$$F(n, f(n), \Delta f(n), \ldots, \Delta^k f(n)) = 0, \tag{29}$$

où $f(n)$ représente la fonction discrète cherchée, est appelée *équation aux différences d'ordre k*.

L'équation du type (28) est ramenée à une équation du type (29) au moyen de la formule

$$f(n+k) = f(n) + C_k^1 \Delta f(n) + C_k^2 \Delta^2 f(n) + \ldots + \Delta^k f(n), \tag{30}$$

alors que la formule

$$\Delta^k f(n) = f(n+k) - C_k^1 f(n+k-1) + C_k^2 f(n+k-2) - \ldots + (-1)^k f(n)$$
$$(k = 0, 1, 2, \ldots), \tag{31}$$

où $C_k^m = \frac{k(k-1)\ldots(k-m+1)}{m!}$ sont des coefficients binomiaux, donne la possibilité de ramener l'équation (29) à l'équation (28).

Si l'équation (29) est une équation linéaire par rapport à $f(n)$ et à ses différences, elle est appelée équation aux différences linéaire. Une équation aux différences linéaire d'ordre k est de la forme

$$b_0 \Delta^k f(n) + b_1 \Delta^{k-1} f(n) + \ldots + b_k f(n) = \varphi(n), \tag{32}$$

où $\varphi(n)$ est la fonction discrète donnée, $f(n)$ est la fonction discrète inconnue, b_0. $b_1, \ldots, b_k$ étant des constantes, de plus $b_0 \neq 0$, $b_k \neq 0$.

En remplaçant dans l'équation (32) les différences $\Delta^m f(n)$ $(m = 1, 2, \ldots \ldots, k)$ d'après la formule (31), on obtient une autre présentation de l'équation aux différences linéaire:

$$a_0 f(n+k) + a_1 f(n+k-1) + \ldots + a_k f(n) = \varphi(n). \tag{33}$$

Si $\varphi(n) \equiv 0$, les équations (32) et (33) sont appelées *homogènes*, tandis que si $\varphi(n) \not\equiv 0$, ces équations sont dites *non homogènes*.

Une équation aux différences qui contient $f(n)$ et $f(n+k)$ est appelée équation aux différences d'ordre k $(k > 0)$. De cette façon, pour $a_0 \neq 0$ et $a_k \neq 0$, l'équation (33) est une équation aux différences linéaire non homogène d'ordre k.

L'ordre d'une équation aux différences ne doit pas obligatoirement coïncider avec l'ordre de la différence la plus élevée qu'elle contient si l'équation aux différences est mise sous la forme (32).

EXEMPLE 16. L'équation aux différences

$$\Delta^3 f(n) + 4\Delta^2 f(n) + 5\Delta f(n) + 2f(n) = 0$$

dans laquelle les différences ont été remplacées d'après la formule (31) est ramenée à la forme

$$f(n+3) + f(n+2) = 0 \quad \text{ou} \quad f(n+1) + f(n) = 0,$$

donc, c'est une équation aux différences du premier ordre.

Déterminer les ordres des équations aux différences suivantes:

880. $\Delta^4 f(n) + 4\Delta^3 f(n) + 4\Delta^2 f(n) - f(n) = 0.$

881. $\Delta^3 f(n) + 3\Delta^2 f(n) + 3\Delta f(n) + f(n) = n^3 + 1$.
882. $\Delta^3 f(n) + 2\Delta^2 f(n) + \Delta f(n) = 2^n$.
883. $\Delta^4 f(n) + 4\Delta^3 f(n) + 6\Delta^2 f(n) + 5\Delta f(n) + 2f(n) = \sin\frac{n\pi}{6}$.

Si une équation aux différences d'ordre k est de la forme (32), ses conditions initiales sont données en tant que valeurs de la fonction discrète $f(n)$ et de ses différences allant jusqu'à l'ordre $(k-1)$ inclus pour $n=0$; si l'équation est mise sous la forme (33), ce sont les valeurs de la fonction discrète $f(n)$ pour $n=0, 1, \ldots, k-1$ qui sont utilisées.

La solution des équations aux différences linéaires à coefficients constants avec utilisation de la transformation de Laplace discrète est obtenue en suivant le même itinéraire que dans le cas où l'on a affaire à la transformation de Laplace classique. En appliquant la transformation de Laplace discrète aux équations susmentionnées et en utilisant les théorèmes de linéarité, d'avancement ou de l'image des différences, on arrive à une équation algébrique linéaire simple par rapport à l'image $F^*(p)$ de la fonction inconnue $f(n)$, compte tenu déjà des conditions initiales. En résolvant cette équation algébrique par rapport à $F^*(p)$, on obtient la solution opératorielle de l'équation aux différences dont l'original sera la solution cherchée de l'équation aux différences de départ satisfaisant aux conditions initiales.

EXEMPLE 17. Trouver la solution de l'équation

$$f(n+1) - ef(n) = 1, \quad f(0) = 0. \tag{34}$$

SOLUTION. Soit $f(n) \doteqdot F^*(p)$. D'après le théorème d'avancement,

$$f(n+1) \doteqdot e^p F^*(p).$$

En appliquant la transformation de Laplace discrète aux deux membres de (34), on obtient l'équation opératorielle

$$e^p F^*(p) - eF^*(p) = \frac{e^p}{e^p-1}, \quad \text{d'où} \quad F^*(p) = \frac{e^p}{(e^p-e)(e^p-1)}.$$

La fonction $F^*(p)$ possède deux pôles simples $p=0$, $p=1$:

$$\operatorname*{Res}_{p=0}[F^*(p)\,e^{(n-1)p}] = \lim_{p\to 0}\frac{e^p}{e^p-e}\,e^{(n-1)p} = \frac{1}{1-e},$$

$$\operatorname*{Res}_{p=1}[F^*(p)\,e^{(n-1)p}] = \frac{e}{e-1}\,e^{n-1} = \frac{e^n}{e-1}.$$

Par conséquent, d'après la formule (25),

$$f(n) = \frac{e^n-1}{e-1}.$$

Résoudre les équations aux différences linéaires homogènes:

884. $f(n+1) - 2f(n) = 0, \quad f(0) = 1$.
885. $f(n+2) + 2f(n+1) + f(n) = 0, \quad f(0) = 1, \quad f(1) = 0$.
886. $f(n+2) - 2f(n+1) + 2f(n) = 0, \quad f(0) = 0, f(1) = 1$.
887. $f(n+3) - 3f(n+2) + 4f(n+1) - 2f(n) = 0,$
$f(0) = 0, \quad f(1) = 0, \quad f(2) = 1$.
888. $f(n+4) + f(n) = 0, \quad f(0) = 0, \quad f(1) = 1, \quad f(2) = 0,$
$f(3) = 0$.

889. $f(n+3)+3f(n+2)+3f(n+1)+f(n)=0,$
$f(0)=0,\quad f(1)=0,\quad f(2)=1.$

Résoudre les équations aux différences linéaires non homogènes:

890. $f(n+1)+2f(n)=n,\quad f(0)=0.$

891. $f(n+2)-4f(n)=4^n,\quad f(0)=f(1)=1.$

892. $f(n+2)+f(n)=1-(-1)^n,\quad f(0)=0,\quad f(1)=1.$

893. $f(n+2)-6f(n+1)+9f(n)=n\cdot 3^n,$
$f(0)=0,\quad f(1)=0.$

894. $f(n+3)+3f(n+2)+3f(n+1)+f(n)=\cos n\pi,$
$f(0)=0,\quad f(1)=0,\quad f(2)=0.$

895. $f(n+3)-3f(n+2)+3f(n+1)-f(n)=n^2,$
$f(0)=0,\quad f(1)=0,\quad f(2)=0.$

CHAPITRE III

THÉORIE DE LA STABILITÉ

§ 22. Notion de stabilité de la solution d'un système d'équations différentielles. Les plus simples types de points de repos

Soit le système d'équations différentielles ordinaires

$$\frac{dy_i}{dt}=f_i(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) \quad (i=1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

où $\frac{\partial f_i}{\partial y_k}$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ existent et sont continues, et admettons que $\varphi_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ est la solution de ce système satisfaisant, pour $t = t_0$, aux conditions

$$\varphi_i(t_0) = \varphi_i^0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

La solution $\varphi_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ du système (1) est appelée *stable au sens de Liapounov*, pour $t \to +\infty$, si, pour n'importe quel $\varepsilon > 0$, on peut choisir un $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que, pour toute solution $y_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ du même système (1) dont les valeurs initiales vérifient les inégalités

$$|y_i(t_0) - \varphi_i^0| < \delta(\varepsilon) \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

les inégalités

$$|y_i(t) - \varphi_i(t)| < \varepsilon \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{2}$$

restent valables pour tous les $t \geqslant t_0$, c'est-à-dire que les solutions proches d'après les valeurs initiales restent proches pour tous les $t \geqslant t_0$.

Autrement dit, la solution $\varphi_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ est stable si une solution $y_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ qui lui est assez proche au moment initial $t = t_0$ est contenue, pour tous les $t \geqslant t_0$, dans un ε-cylindre aussi mince que l'on veut, construit autour de la solution $\varphi_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Si pour $\delta > 0$ aussi petit que l'on veut les inégalités (2) ne sont pas vérifiées ne fût-ce que pour une seule des solutions $y_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, la solution $\varphi_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ est appelée *instable*.

Si la solution $\varphi_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ est non seulement stable mais satisfait en outre aux conditions

$$\lim_{t\to\infty} |y_i(t) - \varphi_i(t)| = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{3}$$

lorsque $|y_i(t_0) - \varphi_i^0| < \delta_1$, elle est appelée *asymptotiquement stable*.

La question concernant la stabilité de la solution $\varphi_i(t)$ du système (1) peut être ramenée au problème de la stabilité de la solution nulle $x_i(t) \equiv 0$ d'un autre système d'équations obtenu à partir du système (1) à la suite d'un changement linéaire des fonctions inconnues

$$x_i(t) = y_i(t) - \varphi_i(t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{4}$$

14—01485

où $x_i(t)$ représentent les nouvelles fonctions inconnues qui sont égales aux écarts des fonctions inconnues précédentes $y_i(t)$ par rapport aux fonctions $\varphi_i(t)$ qui définissent la solution examinée. C'est pour cela que dans la suite nous allons considérer que l'étude de stabilité concerne justement la solution nulle $x_i(t) \equiv 0$ ou, ce qui revient au même, le point de repos du système d'équations

$$\frac{dx_i}{dt} = \psi_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (i=1, 2, \ldots, n) \tag{5}$$

qui se trouve à l'origine des coordonnées. Le terme « solution nulle » sera parfois remplacé par le terme *solution triviale*.

Appliquée au point de repos $x_i(t) \equiv 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, la condition de stabilité est formulée comme suit:

Le point de repos $x_i(t) \equiv 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ du système (5) *est stable au sens de Liapounov si pour chaque $\varepsilon > 0$ on peut choisir un $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que de l'inégalité $|x_i(t_0)| < \delta(\varepsilon)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ il découle que $|x_i(t)| < \varepsilon$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ pour tous les $t \geqslant t_0$.*

EXEMPLE 1. Chaque solution de l'équation

$$\frac{dx}{dt} = 0 \tag{6}$$

est stable.

En effet, la solution $x_1(t)$ de cette équation qui satisfait à la condition initiale $x_1(t_0) = x_1^0$ est de la forme $x_1(t) \equiv x_1^0 = \text{const}$.

Considérons une autre solution $x_2(t)$ de l'équation (6) qui satisfait à la condition initiale

$$x_2(t_0) = x_2^0. \tag{7}$$

Pour ces solutions, pour tous les t, on a $|x_2(t) - x_1(t)| = |x_2^0 - x_1^0|$. Il s'ensuit que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ (par exemple, $\delta = \varepsilon$) tel que, dès que $|x_2^0 - x_1^0| < \delta$, l'inégalité

$$|x_2(t) - x_1(t)| = |x_2^0 - x_2^0| < \varepsilon, \qquad \text{pour tous les} \qquad t \geqslant t_0,$$

sera satisfaite pour les solutions $x_2(t)$ et $x_1(t)$. Par conséquent, toute solution de l'équation (6) est stable. Toutefois, il n'y a pas de stabilité asymptotique:

$$|x_2(t) - x_1(t)| = |x_2^0 - x_1^0| \not\to 0 \qquad \text{pour } t \to +\infty.$$

EXEMPLE 2. Chaque solution de l'équation

$$\frac{dx}{dt} + x = 0 \tag{8}$$

est asymptotiquement stable.

En effet, la solution générale de cette équation est de la forme

$$x(t) = Ce^{-t}. \tag{9}$$

Les solutions $x_1(t)$, $x_2(t)$ de l'équation (8) qui vérifient les conditions initiales $x_1(t_0) = x_1^0$, $x_2(t_0) = x_2^0$ sont les suivantes:

$$x_1(t) = x_1^0 e^{-(t-t_0)}, \qquad x_2(t) = x_2^0 e^{-(t-t_0)},$$

d'où l'on trouve

$$|x_2(t) - x_1(t)| = |x_2^0 - x_1^0| e^{-(t-t_0)} \longrightarrow 0 \qquad \text{pour} \qquad t \longrightarrow +\infty,$$

ce qui signifie que toute solution de l'équation (8) est asymptotiquement stable.

EXEMPLE 3. La solution $x(t) \equiv -1$ de l'équation $\frac{dx}{dt} = 1 - x^2(t)$

est instable, car, pour $t \to +\infty$, toutes les solutions de l'équation

$$x(t)=\frac{(1+x_0)\,e^{2(t-t_0)}-(1-x_0)}{(1+x_0)\,e^{2(t-t_0)}+(1-x_0)}$$

tendent vers $+1$. Par définition, la solution $x(t) \equiv 1$ de cette équation est asymptotiquement stable.

En partant de la définition, entreprendre l'étude de stabilité des solutions des équations et systèmes suivants:

896. $\frac{dx}{dt}+x=1, \quad x(0)=1.$

897. $\frac{dx}{dt}=-t(x-1), \quad x(0)=1.$

898. $\frac{dx}{dt}-2x=t, \quad x\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}.$

899. $\frac{dx}{dt}=2xt, \quad x(0)=0.$ **900.** $\frac{dx}{dt}=\cos t, \quad x(0)=1.$

901. $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=y,\\ \frac{dy}{dt}=-3y-2x,\end{cases} \quad x(0)=y(0)=0.$

902. $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=y,\\ \frac{dy}{dt}=2y+3x,\end{cases} \quad x(0)=y(0)=0.$

LES PLUS SIMPLES TYPES DE POINTS DE REPOS. Soit donné le système d'équations différentielles

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=P(x, y),\\ \frac{dy}{dt}=Q(x, y).\end{cases} \tag{A}$$

Le point (x_0, y_0) est appelé *point de repos* ou *point singulier du système* (A) si $P(x_0, y_0)=0$, $Q(x_0, y_0)=0$.

Considérons le système

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=a_{11}x+a_{12}y,\\ \frac{dy}{dt}=a_{21}x+a_{22}y,\end{cases} \tag{1}$$

où a_{ij} $(i, j=1, 2)$ sont des constantes. Le point (0, 0) est un point de repos du système (1). Examinons la disposition des trajectoires du système (1) dans le voisinage de ce point. La solution cherchée doit être de la forme

$$x=\alpha_1 e^{kt}, \qquad y=\alpha_2 e^{kt}. \tag{2}$$

Pour déterminer k, on obtient l'équation caractéristique suivante:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-k \end{vmatrix}=0. \tag{3}$$

Examinons les cas qui peuvent se présenter.

I. LES RACINES DE L'ÉQUATION CARACTÉRISTIQUE SONT RÉELLES ET DISTINCTES. Les éventualités suivantes sont possibles: 1) $k_1 < 0$, $k_2 < 0$. Le point de repos est asymptotiquement stable (nœud stable). 2) $k_1 > 0$, $k_2 > 0$. Le point de repos est instable (nœud instable). 3) $k_1 > 0$, $k_2 < 0$. Le point de repos est instable (selle). 4) $k_1 = 0$, $k_2 > 0$. Le point de repos est instable. 5) $k_1 = 0$, $k_2 < 0$. Le point de repos est stable mais sa stabilité n'est pas asymptotique.

II. LES RACINES DE L'ÉQUATION CARACTÉRISTIQUE SONT COMPLEXES: $k_1 = p + qi$, $k_2 = p - qi$. Les éventualités suivantes sont possibles: 1) $p < 0$, $q \neq 0$. Le point de repos est asymptotiquement stable (foyer stable). 2) $p > 0$, $q \neq 0$. Le point de repos est instable (foyer instable). 3) $p = 0$, $q \neq 0$. Le point de repos est stable (centre). Il n'y a pas de stabilité asymptotique.

III. LES RACINES SONT MULTIPLES: $k_1 = k_2$. Les éventualités suivantes sont possibles: 1) $k_1 = k_2 < 0$. Le point de repos est asymptotiquement stable (nœud stable). 2) $k_1 = k_2 > 0$. Le point de repos est instable (nœud instable). 3) $k_1 = k_2 = 0$. Le point de repos est instable. Un cas exceptionnel peut se présenter quand tous les points du plan sont des points de repos stables.

Pour un système d'équations linéaires homogènes à coefficients constants

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{4}$$

on aura comme équation caractéristique

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-k & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn}-k \end{vmatrix} = 0. \tag{5}$$

1) Si les parties réelles de toutes les racines de l'équation caractéristique (5) du système (4) sont négatives, le point de repos $x_i(t) \equiv 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ est asymptotiquement stable.

2) Si la partie réelle ne fût-ce que d'une seule racine de l'équation caractéristique (5) est positive, $\operatorname{Re} k_i = p_i > 0$, alors le point de repos $x_i(t) \equiv 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ du système (4) est instable.

3) Si l'équation caractéristique (5) admet des racines *simples* à partie réelle nulle (c'est-à-dire des racines nulles ou imaginaires pures), alors le point de repos $x_i(t) \equiv 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ du système (4) est stable mais sa stabilité n'est pas asymptotique.

EXEMPLE 4. Établir le caractère du point de repos (0, 0) du système

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x. \end{cases}$$

SOLUTION. Dans le cas examiné,

$$a_{11} = 0, \qquad a_{12} = 1, \qquad a_{21} = -1, \qquad a_{22} = 0.$$

L'équation caractéristique sera

$$\begin{vmatrix} -k & 1 \\ -1 & -k \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{ou} \qquad k^2 + 1 = 0.$$

Les racines de l'équation caractéristique sont imaginaires pures: $k_{1,2} = \pm i$. Le point de repos est stable (centre).

Etablir le caractère du point de repos (0, 0) des systèmes suivants:

903. $\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = 2x + 3y. \end{cases}$ 904. $\begin{cases} \dot{x} = 4y - x, \\ \dot{y} = -9x + y. \end{cases}$

905. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - 3y, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$ 906. $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y, \\ \dot{y} = 2y - 3x. \end{cases}$

907. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$ 908. $\begin{cases} \dot{x} = -x + 2y, \\ \dot{y} = -2x + 3y. \end{cases}$

909. $\begin{cases} \dot{x} = -2x + y, \\ \dot{y} = -x - 4y. \end{cases}$ 910. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + 2z, \\ \dot{y} = 5x - 3y + 3z, \\ \dot{z} = -x - 2z. \end{cases}$

911. $\begin{cases} \dot{x} = x - 3y + 4z, \\ \dot{y} = 4x - 7y + 8z, \\ \dot{z} = 6x - 7y + 7z. \end{cases}$

S'il s'agit d'un système de deux équations linéaires à coefficients réels constants

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \dot{y} = a_{21}x + a_{22}y \end{cases} \tag{1}$$

l'équation caractéristique (3) se met sous la forme

$$k^2 + a_1k + a_2 = 0.$$

1) Si $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, alors la solution nulle du système (1) est asymptotiquement stable.

2) Si $a_1 > 0$, $a_2 = 0$ ou $a_1 = 0$, $a_2 > 0$, alors la solution nulle est stable mais la stabilité n'est pas asymptotique.

3) Dans tous les autres cas, la solution nulle est instable; toutefois, pour $a_1 = a_2 = 0$, un cas exceptionnel peut se présenter quand la solution nulle est stable mais non asymptotiquement.

EXEMPLE 5. Déterminer la valeur du paramètre α pour laquelle la solution nulle du système est stable

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = (\alpha - 1)x - \alpha y. \end{cases}$$

SOLUTION. Pour le système considéré, l'équation caractéristique est de la forme

$$\begin{vmatrix} -k & 1 \\ \alpha - 1 & -\alpha - k \end{vmatrix} = 0$$

ou $k^2 + \alpha k + 1 - \alpha = 0$. Ici $a_1 = \alpha$, $a_2 = 1 - \alpha$.

La stabilité asymptotique de la solution nulle aura lieu pour $\alpha > 0$, $1 - \alpha > 0$, c'est-à-dire si $0 < \alpha < 1$.

La stabilité non asymptotique aura lieu dans les deux cas suivants:

a) $\alpha > 0$, $1 - \alpha = 0$, c'est-à-dire pour $\alpha = 1$;

b) $\alpha = 0$, $1 - \alpha > 0$, c'est-à-dire pour $\alpha = 0$.

Pour toutes les autres valeurs de α, la solution nulle est instable.

Déterminer les valeurs du paramètre α pour lesquelles les solutions nulles des systèmes suivants sont stables:

912. $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = 5\alpha x - \alpha^2 y. \end{cases}$

913. $\begin{cases} \dot{x} = -x + y, \\ \dot{y} = \alpha x - \alpha^2 y. \end{cases}$

914. $\begin{cases} \dot{x} = \alpha^2 x - 3y, \\ \dot{y} = \alpha x + 4y. \end{cases}$

915. $\begin{cases} \dot{x} = y + \alpha x, \\ \dot{y} = -x. \end{cases}$

916. $\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - y, \\ \dot{y} = \alpha y - z, \\ \dot{z} = \alpha z - x. \end{cases}$

EXEMPLE 6. Trouver dans le plan des paramètres α et β les domaines où la solution nulle du système d'équations

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x + (\beta - 2\alpha\beta - 1)\, y, \\ \dot{y} = x - \beta y \end{cases}$$

est stable.

SOLUTION. L'équation caractéristique du système sera

$$\begin{vmatrix} \alpha - k & \beta - 2\alpha\beta - 1 \\ 1 & -\beta - k \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$k^2 + (\beta - \alpha)\, k + 1 + \alpha\beta - \beta = 0.$$

Ici

$$a_1 = \beta - \alpha, \quad a_2 = 1 + \alpha\beta - \beta;$$

a_1 et a_2 sont des fonctions continues de α et β et c'est pour cela que les signes de a_1 et a_2 seront inversés pour $a_1 = a_2 = 0$, c'est-à-dire sur la droite $\beta - \alpha = 0$ et sur l'hyperbole $1 + \alpha\beta - \beta = 0$. Ces lignes séparent le plan des paramètres α, β en quatre domaines *I*, *II*, *III*, *IV* (fig. 37) dans chacun desquels les signes de a_1 et a_2 ne varient pas. Prenons un point arbitraire dans chaque domaine et déterminons les signes des coefficients a_1 et a_2 à ces points.

Domaine *I*: au point $(-1; 1)$ on a $a_1 = 2 > 0$, $a_2 = -1 < 0$. La solution nulle du système dans ce domaine est instable.

Domaine *II*: au point $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ on a $a_1 = \frac{1}{2} > 0$, $a_2 = \frac{1}{2} > 0$. La solution nulle dans le domaine *II* est asymptotiquement stable.

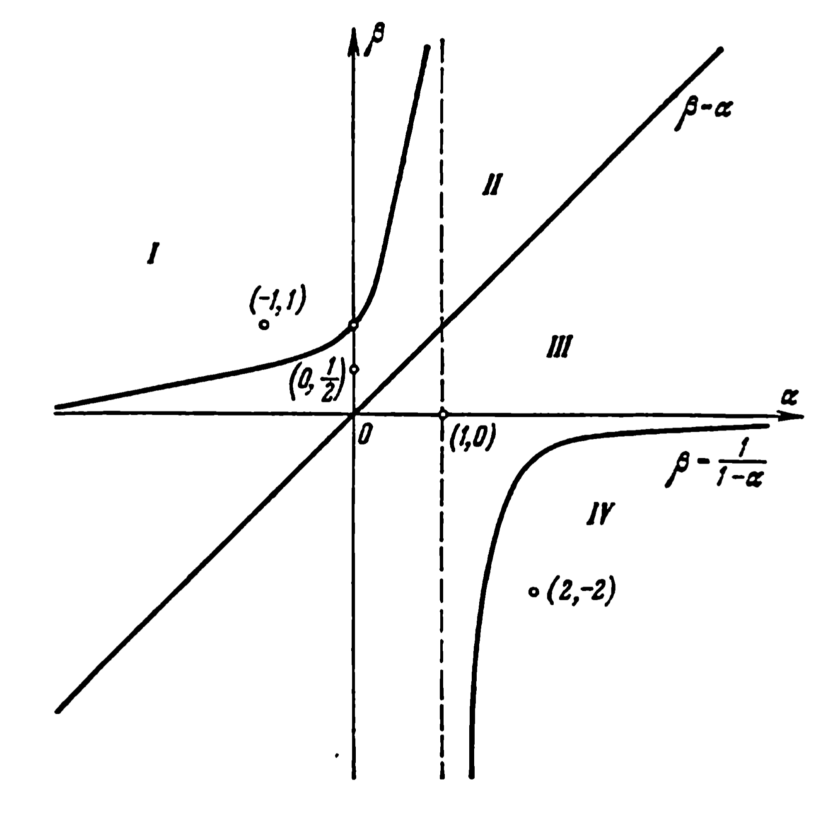


Fig. 37.

Domaine *III*: au point (1, 0) on a $a_1 = -1 < 0$, $a_2 = 1 > 0$. La solution nulle dans le domaine *III* est instable.

Domaine *IV*: au point (2, −2) on a $a_1 = -4 < 0$, $a_2 = -1 < 0$. La solution nulle dans ce domaine est instable.

Etudions maintenant la stabilité de la solution nulle sur les frontières des domaines ci-dessus.

1) $\beta = \frac{1}{1-\alpha}$, $\alpha < 1$ (la frontière qui sépare les domaines *I* et *II*). Sur cette frontière, $a_1 > 0$, $a_2 = 0$, ce qui veut dire que la solution nulle y est stable mais que sa stabilité n'est pas asymptotique.

2) $\beta = \alpha$ (la frontière qui sépare les domaines *II* et *III*). Sur cette frontière, $a_1 = 0$, $a_2 > 0$, ce qui signifie que la solution nulle y est stable, sans que sa stabilité soit asymptotique.

3) $\beta = \frac{1}{1-\alpha}$, $\alpha > 1$ (la frontière qui sépare les domaines *III* et *IV*). Sur cette frontière, $a_1 < 0$, $a_2 = 0$, ce qui signifie que la solution nulle y est instable.

Donc la solution nulle est asymptotiquement stable dans le domaine *II*, alors que sur la frontière de ce domaine elle conserve sa stabilité, sans que celle-ci soit asymptotique.

Trouver pour les systèmes suivants situés dans le plan des paramètres α et β les domaines où la solution nulle est stable:

917. $\begin{cases} \dot{x} = -x + \alpha y, \\ \dot{y} = \beta x - y. \end{cases}$ **918.** $\begin{cases} \dot{x} = \alpha x + \beta y, \\ \dot{y} = x + \alpha y. \end{cases}$

919. $\begin{cases} \dot{x} = \alpha x + \beta y, \\ \dot{y} = -\beta x + (\alpha - 2) y. \end{cases}$ 920. $\begin{cases} \dot{x} = -\alpha^2 x - \beta^2 y, \\ \dot{y} = (\alpha^2 - 1) x + (\beta^2 + 1) y. \end{cases}$

921. $\begin{cases} \dot{x} = (\alpha^2 - \beta) x + (1 + \beta) y, \\ \dot{y} = -\beta^2 x + \beta^2 y. \end{cases}$ 922. $\begin{cases} \dot{x} = -\alpha^2 x - (\beta + 1) y, \\ \dot{y} = (4\alpha + \beta + 1) x - 4y. \end{cases}$

§ 23. Deuxième méthode de Liapounov

Une fonction $v(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est dite *définie positive dans un voisinage H* $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant H\right)$ *de l'origine des coordonnées* si elle est positive en tous les points de ce voisinage, sauf à l'origine des coordonnées où elle s'annule:

$$v(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0, \quad \text{si} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i^2 > 0,$$

$$v(0, 0, \ldots, 0) = 0.$$

Par exemple, la fonction $v = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ sera une fonction définie positive dans l'espace des variables x_1, x_2, x_3. La fonction $u = x_1^2 + x_2^2$ ne sera qu'une fonction à signe invariable dans ce domaine sans y être définie positive, car elle s'annule sur l'axe Ox_3 tout entier et non seulement au point (0, 0, 0); dans l'espace x_1, x_2, cette fonction sera définie positive.

Si $v(x_1, x_2, \ldots, x_n) < 0$ pour $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 > 0$ et $v(0, 0, \ldots, 0) = 0$, on dit que la fonction $v(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est *définie négative*.

Une fonction $v(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est dite *définie positive dans un voisinage H de l'origine des coordonnées pour* $t \geqslant t_0$ s'il existe une fonction $w(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ définie positive indépendante de t telle que $v(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqslant w(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pour toutes les valeurs indiquées des arguments, et que $v(t, 0, 0, \ldots, 0) = 0$.

Soit donné le système d'équations différentielles

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

et soit

$$v(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

une fonction continûment différentiable de ses arguments. La dérivée totale par rapport à t de la fonction $v(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ calculée en vertu du système (1) (le long des courbes d'intégration) sera égale à

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{2}$$

Si les seconds membres du système (1) ne dépendent pas explicitement de t, un tel système est appelé autonome ou stationnaire.

I. THÉORÈME DE LA STABILITÉ DE LIAPOUNOV. *Si le système d'équations différentielles* (1) *est tel qu'il existe une fonction* $v(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *définie positive pour* $t \geqslant t_0$ *dans un certain voisinage H de l'origine des coordonnées*

dont la dérivée $\frac{dv}{dt}$ *calculée en vertu du système* (1) *n'est pas positive, alors la solution triviale du système* (1) *est stable.*

II. THÉORÈME DE LA STABILITÉ ASYMPTOTIQUE DE LIAPOUNOV (cas des systèmes autonomes). *Si le système autonome d'équations différentielles*

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (i=1, 2, \ldots, n) \tag{3}$$

est tel qu'il existe une fonction $v(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *définie positive dans un certain voisinage H de l'origine des coordonnées dont la dérivée* $\dot{v}=\frac{dv}{dt}$ *calculée en vertu du système* (3) *est définie négative, alors la solution triviale* $x_i \equiv 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *est asymptotiquement stable.*

Les fonctions $v(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $v(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ citées ci-dessus sont appelées *fonctions de Liapounov.*

Appelons domaine $v > 0$ un domaine quelconque situé dans le voisinage $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant H$ de l'origine des coordonnées de l'espace de variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, borné par la surface $v = 0$ et dans lequel la fonction v prend des valeurs positives.

Supposons que la fonction v jouit des propriétés suivantes:

1) pour des t aussi grands que l'on veut dans un voisinage aussi petit que l'on veut de l'origine des coordonnées, le domaine $v > 0$ existe;

2) dans le domaine $v > 0$, la fonction v est bornée;

3) dans le domaine $v > 0$, la dérivée $\frac{dv}{dt}$ formée en vertu du système (2) est définie positive.

III. THÉORÈME D'INSTABILITÉ DE N. TCHÉTAEV. *Si l'on peut trouver pour le système d'équations différentielles* (2) *une fonction satisfaisant aux conditions* 1), 2), 3), *alors la solution triviale de ce système est instable.*

REMARQUE. Si dans le système (2) toutes les fonctions f_i ne sont pas explicitement dépendantes de t, la fonction de Liapounov doit être cherchée en tant qu'une fonction qui n'est pas explicitement dépendante de t.

EXEMPLE 1. Etudier la stabilité de la solution triviale du système

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -(x-2y)(1-x^2-3y^2), \\ \frac{dy}{dt} = -(y+x)(1-x^2-3y^2) \end{cases}$$

SOLUTION. Prenons en qualité de v la fonction $v = x^2 + 2y^2$. C'est tout d'abord une fonction définie positive et, d'autre part, sa dérivée $\frac{dv}{dt}$ prise en vertu du système donné est égale à

$$\frac{dv}{dt}=\frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{dt}=$$

$$=2x(2y-x)(1-x^2-3y^2)-4y(x+y)(1-x^2-3y^2)=$$

$$=-2(1-x^2-3y^2)(x^2+2y^2)\leqslant 0$$

pour x et y suffisamment petits.

On voit que toutes les conditions du théorème de la stabilité de Liapounov sont satisfaites.

Il s'ensuit que la solution triviale $x = 0$, $y = 0$ est stable.

EXEMPLE 2. Etudier la stabilité de la solution triviale du système

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -5y - 2x^3, \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x - 3y^3. \end{cases}$$

SOLUTION. La fonction $v = x^2 + y^2$ vérifie les conditions du théorème de la stabilité asymptotique de Liapounov:

1) $v(x, y) \geqslant 0$, $v(0, 0) = 0$;

2) $\dfrac{dv}{dt} = 2x(-5y - 2x^3) + 2y(5x - 3y^3) = -(4x^4 + 6y^4) \leqslant 0$,

c'est-à-dire que $\dfrac{dv}{dt} < 0$ et $\dfrac{dv}{dt} = 0$ seulement pour $x = 0$, $y = 0$, donc, c'est une fonction définie négative. Il vient que la solution $x = 0$, $y = 0$ est asymptotiquement stable.

EXEMPLE 3. Etudier la stabilité de la solution triviale du système autonome

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x^2 + y. \\ \dfrac{dy}{dt} = y^2 + x. \end{cases}$$

SOLUTION. Prenons en qualité de $v(x, y)$ la fonction

$$v = \frac{1}{3}x^3 + xy + \frac{1}{3}y^3.$$

Dans ce cas, le domaine $v > 0$ est représenté, par exemple, par le domaine $x > 0$, $y > 0$.

Dans le domaine $v > 0$, on a

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{dt} = (x^2 + y)^2 + (x + y^2)^2 > 0.$$

Conformément au théorème de l'instabilité de N. Tchétaev, la solution $x = 0$, $y = 0$ est instable.

A l'aide d'un exemple, nous allons montrer une méthode de construction de la fonction de Liapounov connue sous le nom de méthode de partition des variables.

EXEMPLE 4. Soit donné le système d'équations

$$\begin{cases} \dot{x} = ax^3 + by, \\ \dot{y} = -cx + dy^3, \end{cases} \tag{4}$$

Trouver pour le système (4) la fonction de Liapounov sous la forme

$$v(x, y) = F_1(x) + F_2(y),$$

où $F_1(x)$, $F_2(y)$ représentent certaines fonctions différentiables qui ne sont pas encore connues.

SOLUTION. En vertu du système (4), on a

$$\dot{v} = F_1'(x)\dot{x} + F_2'(y)\dot{y} = F_1'(x)(ax^3 + by) - F_2'(y)(cx - dy^3).$$

Procédons de la sorte que la fonction $\dot{v}$ soit de la même forme que la fonction $v(x, y)$, c'est-à-dire qu'elle représente la somme de deux fonctions dont l'une ne dépend que de x, alors que l'autre contient seulement y. A cette fin, il faut

que l'identité

$$F_1'(x)\, by - F_2'(y)\, cx \equiv 0$$

ait lieu. En séparant les variables, on obtient

$$\frac{cx}{F_1'(x)} = \frac{by}{F_2'(y)},$$

et, par conséquent, chacune de ces fractions doit être égale à une constante, par exemple, à $\frac{1}{2}$. On aura donc

$$\frac{cx}{F_1'(x)} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{by}{F_2'(y)} = \frac{1}{2},$$

d'où

$$F_1(x) = cx^2, \qquad F_2(y) = by^2,$$

et

$$v(x, y) = cx^2 + by^2.$$

Etudier la stabilité de la solution triviale des systèmes suivants:

923. $\begin{cases} \dot{x} = -x + y - 3xy^2 - \frac{1}{4}x^3, \\ \dot{y} = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y - 2y^3. \end{cases}$ 924. $\begin{cases} \dot{x} = y - 3x^3, \\ \dot{y} = -x - 7y^3. \end{cases}$

925. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - y + 2xy^2 - 3x^3, \\ \dot{y} = \frac{1}{3}x - y - x^2y - 7y^3. \end{cases}$ 926. $\begin{cases} \dot{x} = -xy^4, \\ \dot{y} = yx^4. \end{cases}$

927. $\begin{cases} \dot{x} = -5x - 9y + 3xy^2 - x^3, \\ \dot{y} = 3x - 4y - 2x^2y - \frac{1}{2}y^3. \end{cases}$

928. $\begin{cases} \dot{x} = -x - 2xy^2 - xy^6, \\ \dot{y} = -\frac{1}{2}y - x^2y - x^4y^3. \end{cases}$

929. $\begin{cases} \dot{x} = -3x + xy^4 - x^3y^6, \\ \dot{y} = -\frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{4}y^3. \end{cases}$ 930. $\begin{cases} \dot{x} = x - xy^4, \\ \dot{y} = y - x^2y^3. \end{cases}$

931. $\begin{cases} \dot{x} = y^3 + x^5, \\ \dot{y} = x^3 + y^5. \end{cases}$ 932. $\begin{cases} \dot{x} = -2y - x^3, \\ \dot{y} = 3x - 4y^3. \end{cases}$

933. $\begin{cases} \dot{x} = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}xy^2, \\ \dot{y} = -\frac{3}{4}y + 3xz^3, \\ \dot{z} = -\frac{2}{3}z - 2xyz^2 \end{cases}$ 934. $\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{3}y - x - \frac{7}{2}x^3, \\ \dot{y} = -x - \frac{1}{2}y - \frac{5}{2}y^3. \end{cases}$

$(v = x^2 + 2y^2 + 3z^2).$

§ 24. Etude de la stabilité suivant la première approximation

Soit donné le système d'équations différentielles

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

où f_i sont des fonctions différentiables dans le voisinage de l'origine des coordonnées, $f_i(t, 0, 0, \ldots, 0) \equiv 0$.

Etudions la stabilité du point de repos $x_i \equiv 0$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) du système (1). Mettons le système (1) dans le voisinage de l'origine des coordonnées sous la forme

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\, x_j + R_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{2}$$

où R_i sont d'un ordre supérieur à 1 par rapport à $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ (pratiquement, on développe les seconds membres de (1) d'après la formule de Taylor suivant les puissances de x dans le voisinage de l'origine des coordonnées). Au lieu de considérer le point de repos du système (1), étudions la stabilité du point de repos du système linéaire

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\, x_j \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{3}$$

qui est appelé *système d'équations de première approximation* ou *système linéarisé pour le système* (1).

Dans ces conditions, on peut se demander si la stabilité (l'instabilité) du point de repos du système (3) entraîne la stabilité (l'instabilité) du point de repos du système initial (1). Généralement parlant, il n'y a pas de liaison stricte entre les systèmes (1) et (3).

EXEMPLE 1. Examinons l'équation

$$\frac{dx}{dt} = x^2. \tag{4}$$

Ici $f(t, x) \equiv x^2$. L'équation linéarisée pour l'équation (4) est de la forme

$$\frac{dx}{dt} = 0. \tag{5}$$

La solution $x(t) \equiv 0$ de l'équation (5) est stable (cf. § 22). Cette même solution, étant également la solution de l'équation initiale (4), ne sera pas stable pour cette dernière. En effet, chaque solution réelle de l'équation (4) s'écrit

$$x = \frac{x_0}{1 - tx_0}, \qquad x|_{t=0} = x_0,$$

et elle cesse d'exister pour $t = \frac{1}{x_0}$ (la solution n'est pas continuable).

EXEMPLE 2. Examinons l'équation non linéaire

$$\frac{dx}{dt} = x - x^3 e^t. \tag{6}$$

L'équation linéarisée se présente comme suit:

$$\frac{dx}{dt}=x. \tag{7}$$

La solution $x(t)\equiv 0$ de l'équation (7) est instable, car chaque solution de cette équation est de la forme

$$x(t)=Ce^{t}$$

et il est évident que $|x(t)|\to+\infty$ pour $t\to+\infty$. D'autre part, la solution $x(t)\equiv 0$ de l'équation (6) est asymptotiquement stable.

En effet, la solution générale de cette équation est

$$x(t)=Ce^{t}\left[1+\frac{2}{3}C^{2}(e^{3t}-1)\right]^{-1/2}$$

et il est évident qu'elle tend vers zéro lorsque $t\to+\infty$.

Toutefois, en présence de certaines conditions, la stabilité (l'instabilité) de la solution de première approximation entraîne la stabilité (l'instabilité) de la solution du système initial (1).

Pour simplifier les choses, nous allons nous borner au cas où les coefficients $a_{ij}(t)$ du système (3) sont constants. On dit alors que le système (2) est stationnaire en première approximation.

THÉORÈME 1. *Si le système d'équations* (2) *est stationnaire en première approximation, si tous les termes R_i sont bornés par rapport à t et sont développables en séries suivant les puissances de $x_1, \ldots, x_n$ dans un certain domaine $\sum_{i=1}^{n} x_i^2\leqslant H$, si de plus ces développements commencent par des termes d'ordre non inférieur à* 2 *et que toutes les racines de l'équation caractéristique*

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-k & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-k \end{vmatrix}=0 \tag{8}$$

possèdent des parties réelles négatives, alors la solution triviale $x_i\equiv 0$ ($i=1, 2, \ldots, n$) du système (2) *est asymptotiquement stable, c'est-à-dire que, dans ce cas, on peut entreprendre l'étude de la stabilité suivant la première approximation.*

THÉORÈME 2. *Si le système d'équations* (2) *est stationnaire en première approximation, si toutes les fonctions R_i satisfont aux conditions du théorème* 1 *et si au moins une des racines de l'équation caractéristique* (8) *possède une partie réelle positive, alors le point de repos $x_i\equiv 0$ ($i=1, 2, \ldots, n$) du système* (2) *est instable, c'est-à-dire que, dans ce cas aussi, il est possible d'étudier la stabilité suivant la première approximation.*

REMARQUE. Si les parties réelles de toutes les racines de l'équation caractéristique (8) ne sont pas positives, de plus si la partie réelle d'au moins une racine est nulle, alors, généralement parlant, l'étude de la stabilité suivant la première approximation est impossible (dans ce cas, l'influence des termes non linéaires R_i se fait sentir).

EXEMPLE 3. Etudier la stabilité du point de repos $x=0$, $y=0$ du système

$$\begin{cases} \dot{x}=-x+y+2x^{4}-y^{6}, \\ \dot{y}=x-3y+11y^{4}. \end{cases} \tag{9}$$

SOLUTION. Les termes non linéaires vérifient les conditions des théorèmes 1 et 2. Etudions la stabilité du point de repos du système de première approximation

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y, \\ \dot{y} = x - 3y. \end{cases} \qquad (10)$$

L'équation caractéristique

$$\begin{vmatrix} -1-k & 1 \\ 1 & -3-k \end{vmatrix} = 0$$

admet comme racines négatives $k_{1,2} = -2 \pm \sqrt{2}$. Par conséquent, en vertu du théorème 1, le point de repos $x = 0$, $y = 0$ des systèmes (9) et (10) est asymptotiquement stable.

EXEMPLE 4. Considérons l'équation des oscillations d'un pendule

$$\ddot{x} + a\dot{x} + b \sin x = 0. \qquad (11)$$

Ici on désigne par x l'angle d'écart du pendule par rapport à la verticale. A l'équation (11) il correspond le système

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -ay - b \sin x. \end{cases} \qquad (12)$$

Les points de repos du système (12) sont

$$x = k\pi \quad (k \text{ est un entier}), \quad y = 0. \qquad (13)$$

Etudions la stabilité du point de repos $x = 0$, $y = 0$ obtenu à partir de (13) lorsque $k = 0$. En utilisant le développement

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots,$$

écrivons le système de première approximation

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -bx - ay, \end{cases} \qquad (14)$$

dont l'équation caractéristique est de la forme

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0. \qquad (15)$$

Si $a > 0$, $b > 0$, alors les racines de l'équation (15) possèdent des parties réelles négatives et, par conséquent, le point de repos $x = 0$, $y = 0$ est stable suivant la première approximation.

Etudions maintenant la stabilité du point $(\pi, 0)$, ce qui correspond à $k = 1$. En appliquant le développement

$$\sin x = -(x - \pi) + \frac{(x-\pi)^3}{3!} - \ldots$$

et en transférant l'origine des coordonnées au point $x = \pi$, $y = 0$, on arrive au système

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = bx - ay, \end{cases} \qquad (16)$$

qui a comme équation caractéristique

$$\lambda^2 + a\lambda - b = 0. \tag{17}$$

Pour $a > 0$, $b > 0$, les racines de cette équation seront réelles et de signes opposés. Il s'ensuit que le point de repos $(\pi, 0)$ est un point instable pour le système (16).

EXEMPLE 5. Etudier la stabilité du point de repos $x = 0$, $y = 0$ du système

$$\begin{cases} \dot{x} = y - xf(x, y), \\ \dot{y} = -x - yf(x, y), \end{cases} \tag{18}$$

où la fonction $f(x, y)$ peut être développée en une série entière convergente et $f(0, 0) = 0$.

SOLUTION. Le système linéarisé est de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x. \end{cases} \tag{19}$$

Le point de repos du système (19) se situe au point (0, 0).

L'équation caractéristique du système (19)

$$\begin{vmatrix} -k & 1 \\ -1 & -k \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{ou} \qquad k^2 + 1 = 0 \tag{20}$$

admet les racines imaginaires pures $k_{1,2} = \pm i$. Le point de repos (0, 0) du système de première approximation (19) est stable (c'est un centre). Etant donné que les parties réelles des racines de l'équation caractéristiques (20) sont égales à zéro, conformément à la remarque ci-avant, l'étude de la stabilité du point de repos (0, 0) doit être poursuivie. Pour étudier la stabilité du point de repos (0, 0) du système (18), faisons appel à la deuxième méthode de Liapounov. En posant $v(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, on trouve

$$\frac{dv}{dt} = -(x^2 + y^2) f(x, y).$$

Il en découle que: si $f(x, y) \geqslant 0$ dans un voisinage suffisamment petit de l'origine des coordonnées, le point de repos (0, 0) est stable; si $f(x, y)$ est une fonction définie positive dans un certain voisinage de l'origine des coordonnées, le point de repos (0, 0) est asymptotiquement stable; si $f(x, y) < 0$ dans un voisinage suffisamment petit de l'origine des coordonnées, le point de repos (0, 0) est instable. Cet exemple met en évidence le fait que, dans certains cas, il n'est pas possible de porter une estimation sur la stabilité du point de repos suivant la première approximation.

Etudier la stabilité du point de repos $x = 0$, $y = 0$ suivant la première approximation dans les systèmes suivants:

935. $\begin{cases} \dot{x} = -x + 2y - 3x^2, \\ \dot{y} = 3x - 2y + 2x^2 + y^4. \end{cases}$

936. $\begin{cases} \dot{x} = -\sin x + 3y + x^5, \\ \dot{y} = \frac{1}{4}x - 2y - \frac{1}{6}y^3. \end{cases}$

937. $\begin{cases} \dot{x} = 2e^x + 5y - 2 + x^4, \\ \dot{y} = x + 6\cos y - 6 - y^2. \end{cases}$

938. $\begin{cases} \dot{x} = -3x + 4y + \sin^3 x - y^2, \\ \dot{y} = -2x + \sin y + e^y x^2. \end{cases}$

939. $\begin{cases} \dot{x} = x - 2\sin y - y^3 \sin x, \\ \dot{y} = 2y - 3x - x^3. \end{cases}$

940. $\begin{cases} \dot{x} = x - y + x^2 + y^2, \\ \dot{y} = x + y - y^2. \end{cases}$

941. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 8\sin y, \\ \dot{y} = 2 - e^x - 3y - \cos y. \end{cases}$

942. $\begin{cases} \dot{x} = -4x + \frac{7}{2}\sin y - 3x^2, \\ \dot{y} = -2x + x^2 + y + y^3. \end{cases}$

943. $\begin{cases} \dot{x} = -4y - x^3, \\ \dot{y} = 3x - y^3. \end{cases}$

944. $\begin{cases} \dot{x} = 10\sin x - 29y + 3y^3, \\ \dot{y} = 5x - 14\sin y + y^2. \end{cases}$

945. $\begin{cases} \dot{x} = y - xy^2, \\ \dot{y} = -x^3. \end{cases}$

946. Etudier la stabilité des points de repos d'un pendule soumis à l'action d'un moment de rotation L:

$$\ddot{x} + a\dot{x} + b\sin x = L, \qquad \text{où} \qquad |L| < b.$$

§ 25. Stabilité asymptotique prise dans son ensemble. Stabilité selon Lagrange

Soit donné un système d'équations différentielles

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \ldots, x_n), \qquad f_i(t, 0, \ldots, 0) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \quad (1)$$

et supposons qu'il soit défini dans le demi-espace

$$\Omega: \left\{a < t < +\infty, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i^2 < +\infty\right\}.$$

On dit que la solution triviale $x_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ est *asymptotiquement stable dans son ensemble* si:

1) elle est asymptotiquement stable au sens de Liapounov;

2) toute autre solution $x_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ du système (1) jouit de la propriété

$$\lim_{t\to\infty} x_i(t) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

D'une façon analogue, on définit la stabilité asymptotique prise dans son ensemble de la solution non triviale du système (1).

Nous allons nous borner aux systèmes autonomes, c'est-à-dire aux systèmes dont les seconds membres ne dépendent pas explicitement du temps t:

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(x_1, \ldots, x_n), \qquad f_i(0, \ldots, 0)=0 \quad (i=1, \ldots, n). \tag{2}$$

Nous allons appeler la fonction de Liapounov $v(x_1, \ldots, x_n)$ *infiniment grande* si, pour tout nombre M positif, il existe un nombre R tel qu'en dehors de la sphère $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = R^2$ l'inégalité $v > M$ soit vérifiée.

THÉORÈME (de la stabilité asymptotique prise dans son ensemble). *S'il existe une fonction définie positive infiniment grande $v(x_1, \ldots, x_n)$ telle que $\frac{dv}{dt} < 0$ en dehors de E et que sur E l'on ait $\frac{dv}{dt} \geqslant 0$, où E ne contient pas de trajectoires entières* (sauf la position zéro d'équilibre), *alors la solution triviale du système* (2) *sera asymptotiquement stable dans son ensemble.*

EXEMPLE 1. Considérons l'équation

$$\ddot{x} + x^2\dot{x} + x^3 = 0. \tag{3}$$

Mettons l'équation (3) sous la forme d'un système d'équations équivalent

$$\begin{cases} \dot{x}=y, \\ \dot{y}=-x^3-x^2y. \end{cases} \tag{4}$$

Prenons la fonction

$$v(x, y)=\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{4}x^4$$

en qualité de fonction de Liapounov $v(x, y)$. On a

$$\frac{dv}{dt}=y\dot{y}+x^3\dot{x}=-x^3y-x^2y^2+x^3y=-x^2y^2.$$

Il est évident que $v(x, y) \to \infty$ pour $x^2+y^2 \to \infty$. On voit ensuite que $\dot{v}(x, y)$ ne s'annule que sur les axes de coordonnées (ensemble E). Il est évident que, pour tous les $t \geqslant 0$, on ne trouvera sur ces axes aucune solution, sauf le point de repos à l'origine des coordonnées. En effet, en tous les points de l'axe OY autres que l'origine des coordonnées O, le coefficient angulaire

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-x^3-x^2y}{y}$$

a une valeur finie, ce qui exclut l'existence d'un arc de trajectoire sur cet axe. D'autre part, lorsque l'on s'approche de l'axe OX, le coefficient angulaire $\frac{dy}{dx} \to \infty$ et, pour cette raison, sur cet axe il ne peut y avoir d'arcs de trajectoires non plus. Il s'ensuit que l'ensemble E ne contient pas de trajectoires entières (exceptée l'origine des coordonnées).

En vertu de ce théorème, le point de repos $(0, 0)$ jouit d'une stabilité asymptotique prise dans son ensemble.

947. Montrer que si la solution triviale d'un système autonome linéaire est asymptotiquement stable au sens de Liapounov, elle est également asymptotiquement stable dans son ensemble.

Etudier la stabilité asymptotique prise dans son ensemble des

15—01485

solutions nulles des équations suivantes:

948. $\ddot{x} + \dot{x}^3 + (\dot{x}^2 + 1)\, x = 0$.

949. $\ddot{x} + \dot{x} + (\dot{x}^2 + \dot{x} + 2)\,(2x + x^5) = 0$.

950. $\ddot{x} + x^2 e^{-x}\, \dot{x} + x^3 + 2x = 0$.

Il se peut que le système (2), quoique ne jouissant pas d'une stabilité complète, ait quand même un domaine de stabilité asymptotique.

Le domaine de stabilité asymptotique du système (2) est constitué par un domaine qui contient l'origine des coordonnées O et qui jouit de la propriété suivante: toutes les trajectoires qui prennent le départ dans ce domaine tendent vers l'origine des coordonnées lorsque $t \to \infty$.

Les systèmes linéaires ne connaissent que la stabilité complète, alors que les systèmes non linéaires peuvent ne pas bénéficier d'une telle stabilité.

THÉORÈME. *Soit $v(x_1, \ldots, x_n)$ une fonction à dérivées partielles continues du premier ordre pour tous les x_i. Désignons par Ω_l l'ensemble de tous les points où $v(x_1, \ldots, x_n) < l$. Si l'ensemble Ω_l est borné et si dans cet ensemble*

1) $v(x_1, \ldots, x_n) > 0$ pour $x_i \neq 0$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$,

2) $\dot{v}(x_1, \ldots, x_n) < 0$ pour $x_i \neq 0$

alors l'origine des coordonnées représente la position d'équilibre asymptotiquement stable du système (2), tandis que Ω_l constitue le domaine de stabilité asymptotique.

EXEMPLE 2. Indiquer le domaine de stabilité asymptotique de l'équation

$$\ddot{x} + \varepsilon (x^2 - 1)\, \dot{x} + x = 0 \quad (\varepsilon < 0)$$

(équation de Van der Pol).

SOLUTION. Ecrivons l'équation donnée sous la forme du système

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \varepsilon \left(\dfrac{x^3}{3} - x\right), \\ \dot{y} = -x. \end{cases}$$

Le seul point de repos se trouve à l'origine des coordonnées. Posons $v(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{2}$. Alors $\dot{v}(x, y) = y\dot{y} + x\dot{x} = -\varepsilon x^2 \left(\dfrac{x^2}{3} - 1\right)$. Il est évident que $\dot{v} \leqslant 0$ pour $x^2 \leqslant 3$ $(\varepsilon < 0)$. De cette façon, dans le disque $x^2 + y^2 < 3$, on a: $v > 0$ pour $x^2 + y^2 \neq 0$ et $\dot{v} < 0$ pour $x^2 + y^2 \neq 0$, ce qui veut dire que ce disque est contenu par le domaine de stabilité asymptotique.

STABILITÉ SELON LAGRANGE. Soit donné un système

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{5}$$

où $f_i(t, x_1, \ldots, x_n)$ satisfont aux conditions du théorème d'existence et d'unicité de la solution du système (5) pour tous les $t \in [t_0, +\infty)$ et pour $x_1, \ldots, x_n$ quelconques.

DÉFINITION. Le système (5) est un système stable selon Lagrange si toutes ses solutions sont définies et bornées sur $[t_0, +\infty)$.

951. Montrer que toutes les solutions de l'équation

$$\ddot{x}(t) + \left(a^2 + \frac{1}{1+t^2}\right) x(t) = 0$$

sont bornées sur $[1, +\infty)$.

952. Montrer que toutes les solutions de l'équation

$$\ddot{x}(t)+\left(1+e^{-t^2}-\frac{1}{t+2}\right)x(t)=0$$

sont bornées sur $[1, +\infty)$.

953. En se rapportant aux équations

$$\text{a)}\quad \ddot{x}(t)-\frac{2}{t}\dot{x}(t)+x(t)=0;\quad \text{b)}\quad \ddot{x}(t)+\frac{2}{t}\dot{x}(t)+x(t)=0,$$

montrer que le fait que toutes les solutions de l'équation « limite » $\ddot{x}(t)+x(t)=0$ sont bornées, n'implique pas que les solutions de l'équation initiale soient bornées elles aussi.

§ 26. Critère de Routh-Hurwitz

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que toutes les racines d'une équation algébrique à coefficients réels $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$

$$f(\lambda)\equiv a_0\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\lambda+a_n=0 \tag{1}$$

soient à parties réelles négatives ont une grande importance du point de vue pratique. Sans restreindre la généralité, on peut supposer que $a_0>0$.

La positivité de tous les coefficients constitue une condition nécessaire mais non suffisante pour que toutes les racines de l'équation (1) soient disposées à gauche de l'axe imaginaire (s'il s'agit d'équations de degré 1 ou 2, la condition susmentionnée est suffisante). Les conditions nécessaires et suffisantes de négativité des parties réelles des racines admises par l'équation (1) ont été formulées par Routh et indépendamment de celui-ci par Hurwitz.

CONDITIONS DE ROUTH-HURWITZ. *Pour que toutes les racines de l'équation* (1) *aient des parties réelles négatives, il faut et il suffit que tous les mineurs diagonaux principaux de la matrice de Hurwitz*

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \ldots & 0\\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \ldots & 0\\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \ldots & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{pmatrix} \tag{2}$$

soient positifs.

Un polynôme $f(\lambda)$ de degré $n\geqslant 1$ est appelé *polynôme stable* si toutes ses racines $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ont des parties réelles négatives: $\operatorname{Re}\lambda_j<0$ ($j=1, 2, \ldots, n$). Cela signifie que toutes les racines d'un polynôme stable sont disposées dans le demi-plan gauche.

La matrice de Hurwitz est formée de la façon suivante. Les coefficients du polynôme (1) de a_1 à a_n sont rangés suivant la diagonale principale. Dans les colonnes, les coefficients à indices impairs et pairs se succèdent, de plus les coefficients à indices pairs incluent également le coefficient a_0. Tous les éléments qui manquent, c'est-à-dire les coefficients à indices supérieurs à n ou inférieurs à 0, sont remplacés par des zéros.

Les mineurs diagonaux principaux de la matrice de Hurwitz sont:

$$\Delta_1 = a_1, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \ldots,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \ldots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Ainsi, la condition de Hurwitz se présente-t-elle comme suit:

$$\Delta_1 > 0, \qquad \Delta_2 > 0, \qquad \ldots, \qquad \Delta_n > 0. \tag{4}$$

Etant donné que $\Delta_n = \Delta_{n-1}\cdot a_n$, il faut remarquer que la dernière des conditions $\Delta_n > 0$ peut être remplacée par l'exigence $a_n > 0$.

EXEMPLE 1. Etudier la stabilité de la solution triviale de l'équation

$$y^{V} + y^{IV} + 7y''' + 4y'' + 10y' + 3y = 0.$$

SOLUTION. Formons l'équation caractéristique

$$f(\lambda) = \lambda^5 + \lambda^4 + 7\lambda^3 + 4\lambda^2 + 10\lambda + 3 = 0.$$

Ici $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 7$, $a_3 = 4$, $a_4 = 10$, $a_5 = 3$.

Relevons les mineurs diagonaux de Hurwitz

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 10 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 10 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3\Delta_4 = 3\cdot 8 = 24 > 0,$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 1 & 1 \\ 3 & 10 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \end{vmatrix} = 10\Delta_3 - 3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \\ 3 & 10 & 7 \end{vmatrix} = 50 - 3(49 + 3 - 10 - 28) = 8 > 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \\ 3 & 10 & 4 \end{vmatrix} = 5 > 0, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 3 > 0, \qquad \Delta_1 = 1 > 0.$$

Donc, $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 > 0$, $\Delta_4 > 0$, $\Delta_5 > 0$. Par conséquent, la solution triviale $y \equiv 0$ de l'équation est asymptotiquement stable.

Les calculs peuvent être menés de la façon suivante. On forme d'abord le mineur Δ_n et l'on calcule ensuite successivement les mineurs Δ_1, Δ_2, Δ_3, etc. S'il apparaît un mineur négatif, le système est instable et les calculs ultérieurs sont privés de sens.

Si les coefficients de l'équation (1) sont représentés par des nombres, les conditions (4) sont facilement vérifiables. Mais si les coefficients de l'équation (1) contiennent des paramètres littéraux, alors le calcul des déterminants en présence de k importants devient difficile.

On peut montrer que si les conditions (4) sont satisfaites, tous les coefficients du polynôme (1) seront positifs

$$a_0 > 0, \qquad a_1 > 0, \qquad \ldots, \qquad a_n > 0. \tag{5}$$

On a déjà indiqué que les conditions (5) sont nécessaires mais qu'elles ne suffisent pas à ce que toutes les racines de $f(\lambda)$ soient disposées dans le demi-plan gauche $\operatorname{Re}\lambda < 0$. Toutefois, lorsque les conditions (5) sont remplies, les inégalités (4) ne sont plus indépendantes. Ainsi, par exemple, pour $n = 5$, les conditions de Routh-Hurwitz sont-elles ramenées à deux inégalités: $\Delta_2 > 0$, $\Delta_4 > 0$. Cela a permis à Liénard et à Chipart d'établir d'autres conditions de stabilité contenant à peu près deux fois moins d'inégalités à déterminants que les conditions (4).

CONDITIONS DE LIÉNARD-CHIPART. *Pour qu'un polynôme*

$$f(\lambda) \equiv a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n \tag{1'}$$

ait toutes ses racines à parties réelles négatives, il faut et il suffit que:

1) *tous les coefficients du polynôme $f(\lambda)$ soient positifs:*

$$a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad \ldots, \quad a_n > 0;$$

2) *les inégalités à déterminants*

$$\Delta_{n-1} > 0, \quad \Delta_{n-3} > 0, \ \ldots \tag{6}$$

aient lieu (ici comme ci-avant, on désigne par Δ_k le déterminant de Hurwitz d'ordre k).

EXEMPLE 2. Considérons la même équation que celle de l'exemple 1:

$$y^{V} + y^{IV} + 7y''' + 4y'' + 10y' + 3y = 0.$$

Ici

$$a_0 = a_1 = 1 > 0, \quad a_2 = 7 > 0, \quad a_3 = 4 > 0, \quad a_4 = 10 > 0, \quad a_5 = 3 > 0,$$

ce qui signifie que la première condition du critère de Liénard-Chipart est satisfaite.

On a ensuite,

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 1 & 1 \\ 3 & 10 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \end{vmatrix} = 8 > 0, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 3 > 0,$$

donc, la condition 2) est également vérifiée.

De cette façon, la solution triviale de notre équation est asymptotiquement stable.

Etudier la stabilité des solutions triviales des équations suivantes:

954. $y^{IV} + 7y''' + 12y'' + 23y' + 10y = 0.$
955. $y^{IV} + 2y''' + 4y'' + 2y' + 5y = 0.$
956. $y^{IV} + y''' + 3y'' + 2y' + y = 0.$
957. $y^{V} + 2y^{IV} + 3y''' + 2y'' + y' + y = 0.$

Indiquer les valeurs de α pour lesquelles les solutions triviales des équations suivantes seront stables:

958. $y''' + \alpha y'' + 2y' + y = 0$?
959. $y^{IV} + 2y''' + y'' + \alpha y' + 3y = 0$?
960. $y^{IV} + 3y''' + \alpha y'' + 2y' + y = 0$?

Indiquer les valeurs de α et de β pour lesquelles les solutions triviales des équations suivantes seront stables:

961. $y''' + \alpha y'' + 2y' + \beta y = 0$?

962. $y''' + \alpha y'' + \beta y' + 3y = 0$?

963. $y^{IV} + \alpha y''' + 2y'' + \beta y' + y = 0$?

964. Quelle forme prendront les conditions de Hurwitz pour l'équation réciproque

$$\lambda^4 + p\lambda^3 + q\lambda^2 + p\lambda + 1 = 0$$

(p et q sont des nombres réels)?

§ 27. Critère géométrique de la stabilité (critère de Mikhaïlov)

Soit donnée une équation différentielle d'ordre n à coefficients réels constants

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0. \tag{1}$$

La question de la stabilité de la solution admise par l'équation différentielle (1) se ramène à la question concernant la disposition des racines de l'équation caractéristique

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \tag{2}$$

dans le plan complexe. La solution est fournie par le critère de Mikhaïlov exposé ci-dessous.

Soit donné le polynôme caractéristique

$$f(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n. \tag{3}$$

En substituant $\lambda = i\omega$ dans ce polynôme, on obtient

$$f(i\omega) = u(\omega) + iv(\omega), \tag{4}$$

où

$$\left.\begin{aligned} u(\omega) &= a_n - a_{n-2}\omega^2 + a_{n-4}\omega^4 - \ldots, \\ v(\omega) &= a_{n-1}\omega - a_{n-3}\omega^3 + a_{n-5}\omega^5 - \ldots \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Conformément à (4) et (5), la grandeur $f(i\omega)$, pour le paramètre ω donné, peut être représentée sur le plan complexe uOv sous la forme d'un vecteur. Quand la valeur du paramètre ω varie dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$, l'extrémité de ce vecteur décrit une certaine courbe chaque point de laquelle correspond à une valeur déterminée de ω.

Le lieu des racines ainsi obtenu du vecteur $f(i\omega)$ est appelé *courbe de Mikhaïlov* pour le polynôme $f(\lambda)$ (fig. 38).

Lorsque ω varie de $-\infty$ à $+\infty$, le vecteur $f(i\omega)$ tourne d'un certain angle φ. Si le polynôme $f(\lambda)$ admet m racines à parties réelles positives, alors que les $n - m$ racines restantes sont à parties réelles négatives, alors

$$\varphi = (n-m)\pi + m(-\pi) = (n-2m)\pi. \tag{6}$$

REMARQUE. Etant donné que $u(\omega)$ est une fonction paire, la courbe de Mikhaïlov est symétrique par rapport à l'axe Ou. Pour cette raison, on peut se limiter à la construction de la portion de cette courbe correspondant à la variation du paramètre ω de 0 à $+\infty$. Dans ce cas, la formule (6) prendra la forme

$$\varphi = (n-m)\frac{\pi}{2} + m\left(-\frac{\pi}{2}\right) = (n-2m)\frac{\pi}{2}. \tag{7}$$

Pour que la solution de l'équation (1) soit stable, il faut et il suffit que toutes les racines de l'équation caractéristique $f(\lambda) = 0$ aient des parties réelles négatives, ce qui signifie que dans la formule (7) $m = 0$.

Il en découle la formulation suivante du *critère de Mikhaïlov: pour que la solution triviale de l'équation* (1) *soit stable, il faut et il suffit que*:

1) *le vecteur* $f(i\omega)$ *tourne d'un angle* $\varphi = n\frac{\pi}{2}$, *c'est-à-dire qu'il effectue* $\frac{n}{4}$ *tours dans le sens antihoraire lorsque* ω *varie de* 0 *à* $+\infty$;

2) *le lieu des racines de* $f(i\omega)$ *ne passe pas par le point zéro lorsque* ω *varie de* 0 *à* $+\infty$.

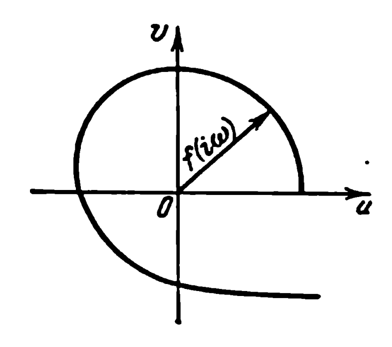


Fig. 38.

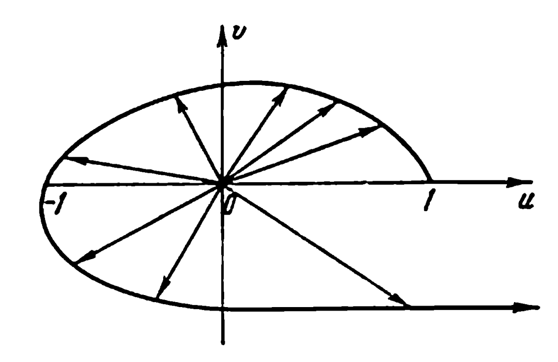


Fig. 39.

Autrement dit, pour que la solution de l'équation (1) soit stable, il faut et il suffit que la courbe de Mikhaïlov traverse à tour de rôle n quadrants dans le sens antihoraire en entourant constamment l'origine des coordonnées.

Si la courbe traverse à tour de rôle les quadrants, cela veut dire qu'elle coupe successivement les axes de coordonnées. Par conséquent, pour que la solution soit stable, les coordonnées $u(\omega)$ et $v(\omega)$ des points de la courbe de Mikhaïlov doivent s'annuler tour à tour. On arrive ainsi à la deuxième formulation du *critère de stabilité de Mikhaïlov*:

Pour que la solution de l'équation (1) *soit stable, il faut* (*si la courbe est décrite dans le sens antihoraire, les conditions ci-dessous sont également suffisantes*) *que toutes les racines des équations* $u(\omega) = 0$, $v(\omega) = 0$ *soient réelles et qu'elles alternent, c'est-à-dire qu'entre deux racines quelconques de l'une de ces équations on trouve une racine de l'autre équation.*

EXEMPLE. Etudier la stabilité de la solution triviale de l'équation

$$y^{IV} + 2y''' + 3y'' + 2y' + y = 0.$$

SOLUTION. Formons le polynôme caractéristique

$$f(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda + 1.$$

Ensuite, on a

$$f(i\omega) = \omega^4 - 2i\omega^3 - 3\omega^2 + 2i\omega + 1,$$

$$u(\omega) = \omega^4 - 3\omega^2 + 1,$$

$$v(\omega) = -2\omega^3 + 2\omega = 2\omega(1 - \omega^2) = 2\omega(1 - \omega)(1 + \omega).$$

Faisons varier ω de 0 à $+\infty$ et construisons la courbe (fig. 39)

$$\begin{cases} u = u(\omega), \\ v = v(\omega), \end{cases}$$

ω	0	$\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$	1	$\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$
u	1	0	-1	0
v	0	+	0	−

$$\lim_{\omega\to\infty}\frac{v}{u}=0.$$

L'angle de rotation du rayon vecteur sera

$$\varphi=4\frac{\pi}{2}=(n-2m)\frac{\pi}{2}.$$

Il en découle que $n-2m=4$; $n=4$; par conséquent, $m=0$. De cette façon, toutes les racines de l'équation caractéristique sont disposées dans le demi-plan gauche, donc la solution triviale $y\equiv 0$ est asymptotiquement stable. En partant du critère de Liénard-Chipart, on aurait pu arriver à la même conclusion, car tous les coefficients de l'équation caractéristique sont positifs et

$$\Delta_{n-1}=\Delta_3=\begin{vmatrix}2&1&0\\2&3&2\\0&1&2\end{vmatrix}=4>0,\qquad \Delta_{n-3}=\Delta_1=2>0.$$

Etudier la stabilité de la solution triviale des équations suivantes:

965. $2y^{\text{IV}}+4y'''+3y''+3y'+y=0.$
966. $3y^{\text{IV}}+4y'''+3y''+3y'+y=0.$
967. $y^{\text{V}}+5y^{\text{IV}}+10y'''+11y''+7y'+2y=0.$
968. $y^{\text{IV}}+5y'''+4y''+3y'+2y=0.$
969. $y^{\text{V}}+2y^{\text{IV}}+2y'''+46y''+89y'+260y=0.$
970. $y^{\text{V}}+y^{\text{IV}}+7y'''+4y''+10y'+3y=0.$
971. $y^{\text{VII}}+7y^{\text{VI}}+23y^{\text{V}}+37y^{\text{IV}}+56y'''+36y''+12y'+4y=0.$
972. $y^{\text{IV}}+3y'''+4y''+3y'+y=0.$
973. $y^{\text{IV}}+7y'''+18y''+22y'+12y=0.$
974. $y^{\text{IV}}+2y'''+3y''+2y'+y=0.$
975. $y^{\text{IV}}+11y'''+59y''+107y'+60y=0.$
976. $y^{\text{IV}}+5y'''+18y''+53y'+60y=0.$
977. $y^{\text{IV}}+6y'''+15y''+18y'+10y=0.$
978. $y^{\text{IV}}+4y'''+10y''+12y'+5y=0.$
979. $y'''+6y''+11y'+6y=0.$
980. $y^{\text{IV}}+7y'''+12y''+23y'+10y=0.$
981. $y^{\text{IV}}+3y'''+3y''+3y'+2y=0.$
982. $y^{\text{IV}}+2y'''+4y''+2y'+5y=0.$

983. $y^{\text{IV}} + 2y'' + 8y' + 5y = 0.$
984. $y^{\text{V}} + 4y^{\text{IV}} + 5y''' + 2y' + 4y = 0.$

§ 28. Décompositions en D

Soit une équation différentielle linéaire à coefficients réels constants

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_ny = 0. \quad (1)$$

Son équation caractéristique sera

$$a_0z^n + a_1z^{n-1} + \ldots + a_n = 0. \quad (2)$$

Pour porter une estimation sur la stabilité de la solution de l'équation (1), il est superflu de calculer les racines de l'équation caractéristique, car il suffit d'établir qu'elles sont disposées dans le demi-plan gauche. Habituellement, ce problème est formulé de deux façons.

PREMIÈRE FORMULATION. En supposant donnés tous les coefficients de l'équation (1), établir si sa solution est stable pour les valeurs indiquées de ces coefficients.

DEUXIÈME FORMULATION. En supposant donnés certains coefficients de l'équation (1), trouver les valeurs des autres coefficients pour lesquelles sa solution est stable.

CONSTRUCTION DES DOMAINES DE STABILITÉ

NOTION DE DÉCOMPOSITION EN D. Soit donnée une équation caractéristique

$$a_0z^n + a_1z^{n-1} + \ldots + a_n = 0. \quad (2)$$

L'ensemble des valeurs des coefficients de l'équation (1) peut être considéré en tant qu'un point d'un espace R_{n+1} à $n + 1$ dimensions. A chaque point de l'espace R_{n+1} il correspond une valeur déterminée des coefficients a_0, a_1, ..., a_n et, par conséquent, une valeur déterminée de toutes les racines z_1, z_2, . . ., z_n de l'équation caractéristique (2). Si dans l'espace R_{n+1} il y a un domaine tel qu'à chacun de ses points il corresponde une équation caractéristique dont toutes les racines sont disposées dans le demi-plan gauche, ce domaine est appelé *domaine de stabilité*, alors que l'hypersurface qui le borne est appelée *frontière du domaine de stabilité*. Supposons, par exemple, que tous les coefficients, sauf deux (par exemple a_1 et a_2), de l'équation caractéristique (2) sont des nombres concrets.

Admettons que, pour certaines valeurs déterminées de a_1 et a_2, notre équation possède dans le plan des racines (c'est-à-dire dans le plan des z) k racines disposées à gauche et $(n - k)$ racines situées à droite de l'axe imaginaire (fig. 40).

Dans le plan A (plan des paramètres a_1 et a_2), il y a une courbe qui borne un domaine (fig. 41) dont chaque point définit un polynôme qui admet également k racines situées à gauche de l'axe imaginaire et $(n - k)$ racines disposées à droite de cet axe. Désignons ce domaine par D $(k, n - k)$ (k est un entier, $0 \leqslant k \leqslant n$).

Si, par exemple, l'équation caractéristique est de puissance 3, c'est-à-dire si $n = 3$, alors, dans le cas général, on peut indiquer les domaines

$$D\ (0,\ 3), \qquad D\ (1,\ 2), \qquad D\ (2,\ 1), \qquad D\ (3,\ 0)$$

situés dans l'espace des coefficients.

Le domaine D (3, 0) sera le domaine de stabilité.

Remarquons que certains domaines, et, en particulier, le domaine D (3, 0), peuvent manquer.

La décomposition de l'espace des coefficients de l'équation caractéristique en domaine contenant le même nombre de racines disposées dans le demi-plan gauche du plan des z est appelée décomposition en D de l'espace des coefficients.

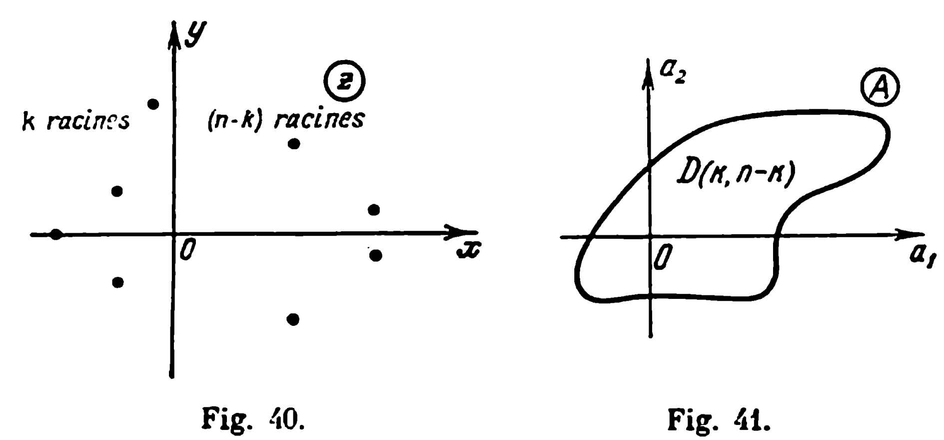


Fig. 40. Fig. 41.

On peut procéder d'une façon analogue pour réaliser la décomposition en D de l'espace de n'importe quels paramètres qui peuvent déterminer la dépendance des coefficients de l'équation caractéristique.

Supposons que les coefficients de l'équation caractéristique (2) dépendent de deux paramètres ξ et η (ces paramètres peuvent, en particulier, être représentés par deux coefficients de l'équation considérée).

Considérons la famille de polynômes

$$f(z, \xi, \eta) = \xi P(z) + \eta Q(z) + R(z), \tag{3}$$

où (ξ, η) sont des paramètres réels, alors que P, Q, R sont des polynômes en z connus à coefficients réels.

Le problème qui se pose peut être formulé de la façon suivante:

Trouver dans le plan des paramètres (ξ, η) (plan des w) un domaine $D(n, 0)$ tel que, pour tout point $(\xi, \eta) \in D(n, 0)$, le polynôme (3) ait toutes ses racines z disposées dans le demi-plan gauche, ou s'assurer qu'un tel domaine n'existe pas.

La construction des domaines $D(k, n-k)$ est basée sur les considérations suivantes:

1. Les racines d'une équation algébrique sont continûment dépendantes de ses coefficients, ce qui signifie qu'une faible variation des coefficients du polynôme $f(z, \xi, \eta)$ entraîne également une faible variation de ses racines.

2. Si un point (ξ, η) se trouve sur la frontière du domaine $D(k, n-k)$, du polynôme (3) se situe sur l'axe imaginaire, c'est-à-dire que la frontière de la décomposition en D représente l'image de l'axe imaginaire du plan des z.

En effet, si, par exemple, le point $(\xi, \eta) \in D(n, 0)$, alors toutes les racines du polynôme (3) sont disposées dans le demi-plan gauche.

Si le point (ξ, η) se situe en dehors de $D(n, 0)$, le polynôme (3) admet au moins une racine dans le demi-plan droit.

Lorsque le point (ξ, η) se déplace continûment en passant du domaine $D(n, 0)$ dans le domaine voisin, les racines du polynôme $f(z, \xi, \eta)$ varient également d'une façon continue. Etant donné que, dans ce cas, il apparaît au moins une racine dans le demi-plan droit, celle-ci doit traverser l'axe imaginaire (axe Oy) au cours du déplacement du point (ξ, η). Cela aura lieu au moment où le point (ξ, η) traversera la frontière du domaine $D(n, 0)$.

Soit $z = x + iy$ une racine du polynôme $f(z, \xi, \eta)$. L'égalité $(z, \xi, \eta) = 0$ équivaut aux égalités

$$\begin{cases} \xi u_1(x, y) + \eta u_2(x, y) + u_3(x, y) = 0, \\ \xi v_1(x, y) + \eta v_2(x, y) + v_3(x, y) = 0, \end{cases} \tag{4}$$

où u_1, u_2, u_3 et v_1, v_2, v_3 sont respectivement les parties réelles et imaginaires des polynômes P, Q et R.

Si le déterminant du système (4)

$$\Delta = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

alors ce système est résoluble d'une façon uniforme par rapport à ξ et η:

$$\begin{cases} \xi = \xi(x, y), \\ \eta = \eta(x, y). \end{cases} \tag{5}$$

Aux points où $\Delta \neq 0$, les équations (5) définissent l'image uniforme du plan des racines du polynôme $f(z, \xi, \eta)$ sur le plan des paramètres (ξ, η).

L'image réciproque n'est plus uniforme: à un couple fixe de valeurs (ξ, η) il correspond, généralement parlant, n racines. Si le déterminant du système (4) s'annule au point $z_0 = x_0 + iy_0$, le système est soit incompatible, soit il contient des équations qui se déduisent l'une de l'autre.

Dans ce dernier cas, sur le plan des paramètres w il existe une droite toute entière constituée de points (ξ, η) pour lesquels $z_0 = x_0 + iy_0$ représente la racine du polynôme $f(z, \xi, \eta)$. Un point (x_0, y_0) de ce type (de même que la droite qui lui correspond) sera appelé point *exceptionnel* (droite *exceptionnelle*).

Trouvons sur le plan des paramètres (ξ, η) les points pour lesquels le polynôme (3) admet au moins une racine imaginaire pure $z = iy$.

Le lieu géométrique de ces points est représenté par une ligne, dont les équations paramétriques sont

$$\begin{cases} \xi = \xi(0, y), \\ \eta = \eta(0, y) \end{cases} \quad (-\infty < y < +\infty), \tag{6}$$

et qui peut être obtenue en posant $x = 0$ dans les équations (5) et par les droites exceptionnelles correspondant aux points exceptionnels de l'axe Oy (si ces points existent).

Il est à remarquer que les équations (6) fournissent l'image de l'axe Oy par l'application (5).

Nous allons appeler dans la suite *ligne L* le lieu géométrique susmentionné.

La ligne L sépare le plan des paramètres en un certain nombre de domaines connexes.

Chacun de ces domaines jouit d'une propriété en vertu de laquelle, pour tout son point (ξ, η), le polynôme $f(z, \xi, \eta)$ admet le même nombre de racines disposées dans le demi-plan gauche, c'est-à-dire il constitue un domaine du type $D(k, n-k)$, $(0 \leqslant k \leqslant n)$.

De cette façon, la ligne L est la frontière de la décomposition en D cherchée.

Examinons l'application (5) du plan des racines sur le plan des paramètres

$$\begin{cases} \xi = \xi(x, y), \\ \eta = \eta(x, y). \end{cases}$$

Menons par le point (x_0, y_0) deux lignes: la ligne horizontale I et la ligne verticale II.

DÉFINITION. Si le sens de rotation de I à II est conservé par l'application (5), on dit que l'application *conserve l'orientation* au point (x_0, y_0); dans le cas contraire, l'application *ne conserve pas l'orientation* (fig. 42 et 43).

Si le déterminant

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} > 0$$

au point (x_0, y_0), l'application (5) conserve l'orientation au point (x_0, y_0). Pour $I < 0$, l'orientation change. Si $I = 0$, la conservation ou la non-conservation de l'orientation est tranchée par les dérivées d'ordre supérieur. On peut

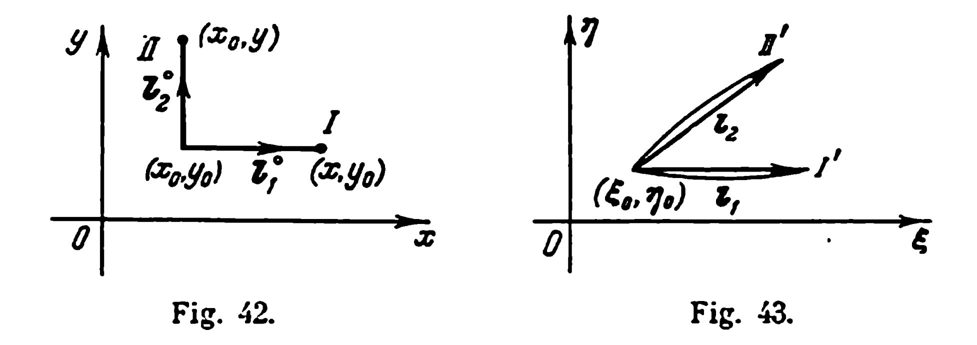


Fig. 42. Fig. 43.

démontrer (cf. [5]) que le signe du déterminant I se confond avec le signe du déterminant Δ où

$$\Delta = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix};$$

de cette façon, si $\Delta > 0$, l'application du plan des racines sur le plan des paramètres conserve l'orientation, alors que pour $\Delta < 0$, l'orientation change.

Examinons de nouveau la décomposition du plan des w (plan des paramètres) en domaines D $(k, n-k)$ $(k \leqslant n)$ et désignons par L la frontière de ces domaines. Le sens correspondant à l'augmentation de y (à partir de $y = -\infty$) sur L sera considéré en tant que sens positif; dans ce cas, la courbe L peut inclure plusieurs branches et, en effectuant le parcours complet de l'axe Oy, différents tronçons qu'elle contienne peuvent être décrits plusieurs fois (mais pas plus que n fois, où n représente la puissance du polynôme $f(z, \xi, \eta)$).

Considérons un certain tronçon w_1w_2 de la courbe L et supposons qu'il est décrit r fois lors du parcours complet de l'axe Oy, ce qui signifie qu'à ce tronçon il correspond r tronçons $y_1^\mu y_2^\mu$ $(\mu = 1, 2, \ldots, r)$ de l'axe susmentionné. Posons $\varepsilon_\mu = 1$ si le sens de $y_1^\mu y_2^\mu$ est le même que celui de l'axe Oy, et $\varepsilon_\mu = -1$ dans le cas contraire. Posons également $\delta_\mu = 1$ si le déterminant $\Delta > 0$ sur le tronçon $y_1^\mu y_2^\mu$, et $\delta_\mu = -1$ dans le cas contraire. Admettons que le point w, qui se déplace continûment suivant un chemin assez petit, traverse l'arc w_1w_2 de gauche à droite (fig. 44). A ce chemin on associe r chemins traversant les segments $y_1^\mu y_2^\mu$ de l'axe Oy dans le plan des z. Si $\varepsilon_\mu \cdot \delta_\mu > 0$, le chemin correspondant est dirigé du demi-plan gauche vers le demi-plan droit et le polynôme

$$f(z, \xi, \eta) = \xi P(z) + \eta Q(z) + R(z)$$

acquiert sur ce segment une racine à partie réelle positive, tout en perdant une racine à partie réelle négative; dans le cas où $\varepsilon_\mu \cdot \delta_\mu < 0$, tout se passe à l'envers.

En effet, soit $\varepsilon_\mu \cdot \delta_\mu > 0$. Cela peut avoir lieu dans les deux cas suivants: 1) $\varepsilon_\mu = 1$, $\delta_\mu = 1$; 2) $\varepsilon_\mu = -1$, $\delta_\mu = -1$. Dans le premier cas, le sens du segment $y_1^\mu y_2^\mu$ de l'axe Oy se confond avec le sens positif de cet axe $(\varepsilon_\mu = 1)$ et l'orientation est conservée $(\delta_\mu = 1)$, ce qui veut dire que si dans le plan des w

on traverse l'arc w_1w_2 de gauche à droite, dans le plan des z on passe du demi-plan gauche au demi-plan droit (l'axe Oy est également traversé de gauche à droite comme indiqué sur la fig. 45).

Dans le deuxième cas, le vecteur $\overrightarrow{y_1^\mu y_2^\mu}$ est dirigé dans le sens opposé au sens $\overrightarrow{Oy}$ ($\varepsilon_\mu = -1$). Etant donné que $\delta_\mu = -1$, on assiste, dans ce cas, à un changement d'orientation et, lorsque dans le plan des w on passe de gauche

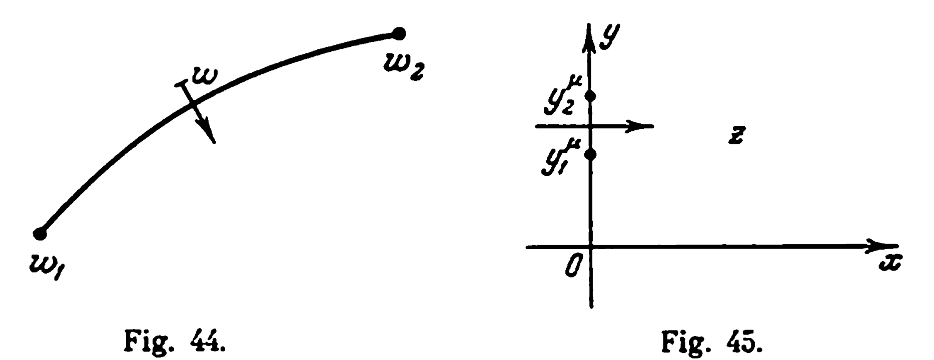


Fig. 44. Fig. 45.

à droite, l'axe Oy dans le plan des z est de nouveau traversé de gauche à droite.

Le cas où $\varepsilon_\mu \cdot \delta_\mu < 0$ est examiné d'une façon analogue.

On voit de cette façon que, lorsque l'on traverse l'arc w_1w_2 de la courbe L de gauche à droite, le polynôme $f(z, \xi, \eta)$ perd

$$N = \varepsilon_1\delta_1 + \varepsilon_2\delta_2 + \ldots + \varepsilon_r\delta_r$$

racines à partie réelle négative.

EXEMPLE DE VYCHNÉGRADSKI. Soit donné le polynôme $f(z) = z^3 + \xi z^2 + \eta z + 1$. Trouver le domaine D (3, 0).

SOLUTION. En posant $z = iy$ et en séparant les parties réelle et imaginaire, on trouve les équations paramétriques de la courbe L:

$$\xi = \frac{1}{y^2}, \qquad \eta = y^2.$$

C'est la branche de l'hyperbole $\xi\eta = 1$ disposée dans le premier quadrant. Lorsque l'on effectue le parcours complet de l'axe Oy (y varie de $-\infty$ à $+\infty$), l'hyperbole est décrite deux fois, donc $r = 2$; lorsque y varie de $-\infty$ à 0,

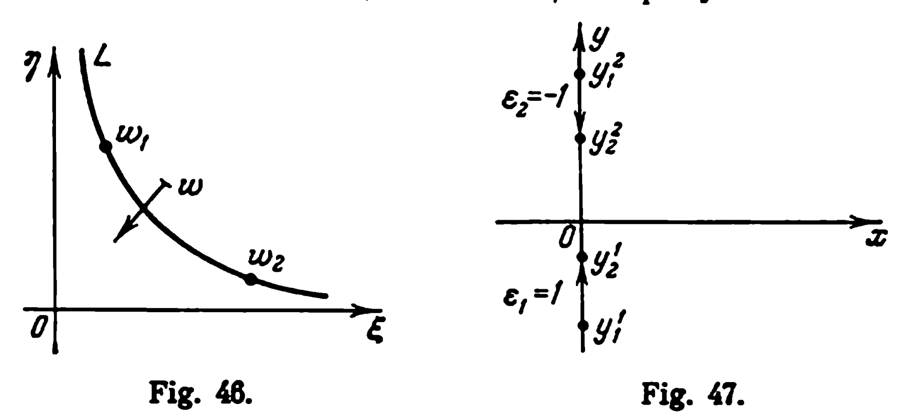


Fig. 46. Fig. 47.

l'hyperbole est parcourue dans un sens, tandis que les variations ultérieures de y de 0 à $+\infty$ entraînent le second parcours de l'hyperbole mais, cette fois-ci, dans le sens inverse. De cette façon, au segment w_1w_2 de la courbe L il correspond deux segments de l'axe Oy: $y_1^1y_2^1$ et $y_1^2y_2^2$ (fig. 46 et 47). Le déterminant Δ

sur l'axe Oy est égal à $\Delta = -y^3$. Par conséquent, $\delta_1 = 1$ (car, pour $\mu = 1$, $y < 0$), alors que $\delta_2 = -1$ (car, pour $\mu = 2$, $y > 0$). Lorsque le point w traverse le segment w_1w_2 de gauche à droite, on perd N racines à partie réelle négative, où

$$N = \varepsilon_1\delta_1 + \varepsilon_2\delta_2 = 2.$$

A l'origine des coordonnées, $\xi = \eta = 0$, le polynôme $f(z)$ prend la forme $z^3 + 1$ et admet comme racines $z_1 = -1$, $z_{2,3} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ et, par conséquent, le domaine disposé au-dessous de l'hyperbole est le domaine D (1, 2). Le domaine qui se trouve au-dessus de l'hyperbole est le domaine D (3, 0). En effet, en passant de ce dernier domaine dans le domaine D (1, 2), le polynôme $f(z)$ perd deux racines à partie réelle négative et devient un polynôme qui admet une racine à partie réelle négative. Cela signifie qu'au-dessus de l'hyperbole il y avait trois racines à partie réelle négative (fig. 48). Pour la vérification, on peut prendre le point $\xi = \eta = 3$ en lequel le polynôme prend la forme

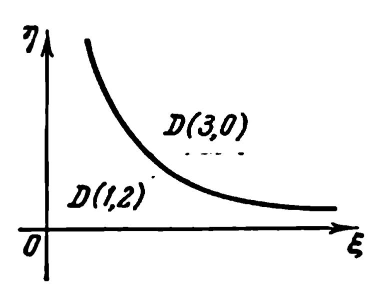


Fig. 48.

$$z^3 + 3z^2 + 3z + 1$$

et admet la racine triple $z = -1$.

Ainsi, pour construire les domaines D, procède-t-on comme suit :

1. Dans le polynôme $f(z, \xi, \eta)$, on pose $z = iy$, on sépare les parties réelle et imaginaire et on égale ces parties à zéro:

$$\begin{cases} \xi u_1(y) + \eta u_2(y) + u_3(y) = 0, \\ \xi v_1(y) + \eta v_2(y) + v_3(y) = 0. \end{cases} \qquad (7)$$

En résolvant (7) par rapport à ξ et η, on obtient

$$\begin{cases} \xi = \xi(y), \\ \eta = \eta(y), \end{cases}$$

c'est-à-dire les équations paramétriques de la ligne L.

2. On construit la courbe L sur le plan des paramètres en faisant varier y dans les limites de $-\infty$ à $+\infty$, de plus, si dans les équations (7) la première variable rencontrée est ξ, tandis que η est la seconde, le système de coordonnées $\xi O\eta$ utilisé pour la construction de la courbe L doit être à droite.

Si, pour une certaine valeur de y le déterminant du système (7) et les déterminants

$$\Delta_\xi = \begin{vmatrix} -u_3 & u_2 \\ -v_3 & v_2 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta_\eta = \begin{vmatrix} u_1 & -u_3 \\ v_1 & -v_3 \end{vmatrix}$$

s'annulent, cela signifie que, pour cette valeur de y, une des équations (7) se déduit de l'autre et, pour cette valeur de y, on obtient dans le plan $\xi O\eta$ une droite (droite singulière ou exceptionnelle) au lieu d'y avoir un point. Cette droite sera également incluse dans la frontière de la décomposition en D.

Si le coefficient du terme d'ordre supérieur de l'équation caractéristique dépend des paramètres ξ et η, en égalant ce coefficient à zéro, on obtient l'équation d'une autre droite singulière correspondant à $y = \infty$.

Si, finalement, le déterminant du système (7) $\Delta \equiv 0$, la frontière de la décomposition en D ne contient que des droites singulières.

3. On sépare les domaines connexes en lesquels la courbe L sépare le plan des paramètres et l'on obtient de cette façon les domaines $D(k, n-k)$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$.

4. On détermine le caractère de ces domaines, c'est-à-dire on trouve k et $n - k$. Pour ce faire, on choisit dans chacun des domaines $D(k, n-k)$ un point (ξ_0, η_0) et l'on étudie la stabilité du polynôme $f(z, \xi_0, \eta_0)$ à coefficients numériques obtenu à l'aide des critères de stabilité de Routh-Hurwitz et de Mikhaïlov exposés au §§ 26 et 27.

Construire les domaines D des polynômes suivants:

985. $z^3 + \xi z^2 + \eta z + 6$. **986.** $z^4 + \xi z^3 + \eta z^2 + 4z + 1$.

987. $z^3 + 2z^2 + 11z + \eta$. **988.** $z^3 + (z^2 + 2)\xi + \eta z - 4$.

989. $z^4 + 2z^3 + \xi z^2 + z + \eta$. **990.** $z^3 + 3z^2 + \xi z + \eta$.

991. $z^3 + \xi z^2 + (z + 1)\eta + 1$. **992.** $z^3 + \eta z^2 + \xi z + 6$.

993. $z^3 + 2z^2 + \xi(z - 1) + \eta$.

994. $z^3 + \xi(z^2 + z) + z + 2\eta$.

995. $\xi z^3 + 3z^2 + \eta z + 1$.

996. $\xi(z^3 + z^2) + \eta(z^2 + 1) + 2z$.

997. $\xi(z^3 - z) + \eta(z^2 + z - 1) + 1$.

§ 29. Stabilité des solutions des équations aux différences

1. *Résolution des équations aux différences linéaires homogènes à coefficients constants.* Soit donnée une équation aux différences d'ordre k:

$$f(n + k) + a_1 f(n + k - 1) + \ldots + a_k f(n) = 0, \qquad (1)$$

où $a_k \neq 0$; $f(n)$ est la fonction cherchée à argument entier; $a_1, \ldots, a_k$ sont des constantes réelles.

Pour trouver les solutions non triviales (non nulles) de l'équation (1), on forme l'équation caractéristique

$$\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + \ldots + a_{k-1}\lambda + a_k = 0. \qquad (2)$$

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ les racines de l'équation (2).

Les cas suivants peuvent se présenter:

1) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ sont des racines réelles et distinctes.

La solution générale de l'équation (1) sera de la forme

$$f(n) = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n + \ldots + C_k\lambda_k^n, \qquad (3)$$

où $C_1, C_2, \ldots, C_k$ sont des constantes arbitraires qui peuvent être déterminées si les conditions initiales

$$f(0) = f_0, \quad f(1) = f_1, \ldots, f(k - 1) = f_{k-1}$$

sont données.

2) Les racines de l'équation caractéristique sont réelles mais parmi elles il y en a qui sont multiples. Soit, par exemple, $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_j = \tilde{\lambda}$, ce qui signifie que λ est une racine de multiplicité j de l'équation (2), alors que toutes les autres racines k sont distinctes.

La solution générale de l'équation (1) sera

$$f(n) = C_1\tilde{\lambda}^n + C_2 n\tilde{\lambda}^n + \ldots + C_j n^{j-1}\tilde{\lambda}^n + C_{j+1}\lambda_{j+1}^n + \ldots + C_k\lambda_k^n. \qquad (4)$$

3) Parmi les racines de l'équation caractéristique (2) il y a des racines complexes simples. Soient, pour fixer les idées

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta,$$
$$\lambda_3 = \gamma + i\delta, \quad \lambda_4 = \gamma - i\delta,$$

tandis que les autres racines sont réelles et distinctes.

La solution générale de l'équation (1) prendra alors la forme

$$f(n)=C_1\,|\lambda_1|^n\cos(n\,\mathrm{Arg}\,\lambda_1)+C_2\,|\lambda_1|^n\sin(n\,\mathrm{Arg}\,\lambda_1)+$$
$$+C_3\,|\lambda_3|^n\cos(n\,\mathrm{Arg}\,\lambda_3)+C_4\,|\lambda_3|^n\sin(n\,\mathrm{Arg}\,\lambda_3)+C_5\lambda_5^n+\ldots+C_k\lambda_k^n. \quad (5)$$

4) Si $\lambda_1=\alpha+i\beta$ est une racine de multiplicité j de l'équation (2) $\left(j\leqslant\frac{k}{2}\right)$, alors $\lambda_2=\alpha-i\beta$ sera également une racine de multiplicité j et la solution générale de l'équation (1) s'écrira

$$f(n)=(C_1+C_2n+\ldots+C_jn^{j-1})\,|\lambda_1|^n\cos(n\,\mathrm{Arg}\,\lambda_1)+$$
$$+(C_{j+1}+C_{j+2}n+\ldots+C_{2j}n^{j-1})\,|\lambda_1|^n\sin(n\,\mathrm{Arg}\,\lambda_1)+$$
$$+C_{2j+1}\lambda_{2j+1}^n+\ldots+C_k\lambda_k^n. \quad (6)$$

REMARQUE. La racine $\lambda=0$ correspond à la solution triviale $f(n)\equiv 0$.

EXEMPLE 1. Trouver la solution générale de l'équation

$$f(n+2)+4f(n+1)+f(n)=0.$$

SOLUTION. On forme l'équation caractéristique

$$\lambda^2+4\lambda+1=0.$$

Les racines de cette équation $\lambda_1=-2-\sqrt{3}$, $\lambda_2=-2+\sqrt{3}$ sont réelles et distinctes, donc,

$$f(n)=C_1(-2-\sqrt{3})^n+C_2(-2+\sqrt{3})^n$$

EXEMPLE 2. Trouver la solution générale de l'équation

$$f(n+3)-3f(n+2)+3f(n+1)-f(n)=0.$$

SOLUTION. L'équation caractéristique est de la forme

$$\lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1=0 \qquad \text{ou} \qquad (\lambda-1)^3=0.$$

D'ici on trouve $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$. La solution générale sera

$$f(n)=(C_1+C_2n+C_3n^2)\cdot 1^n=C_1+C_2n+C_3n^2.$$

EXEMPLE 3. Trouver la solution générale de l'équation

$$f(n+2)-2f(n+1)+2f(n)=0.$$

SOLUTION. L'équation caractéristique

$$\lambda^2-2\lambda+2=0$$

admet les racines complexes simples

$$\lambda_1=1+i, \qquad \lambda_2=1-i.$$

On trouve

$$|1\pm i|=\sqrt{2}, \qquad \mathrm{Arg}\,(1+i)=\frac{\pi}{4}.$$

La solution générale est de la forme

$$f(n)=C_1 2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}+C_2 2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}=2^{\frac{n}{2}}\left(C_1\cos\frac{n\pi}{4}+C_2\sin\frac{n\pi}{4}\right).$$

EXEMPLE 4. Trouver la solution générale de l'équation

$$f(n+4)+2f(n+3)+4f(n+2)-2f(n+1)-5f(n)=0.$$

SOLUTION. On forme l'équation caractéristique

$$\lambda^4+2\lambda^3+4\lambda^2-2\lambda-5=0.$$

Mettons-la sous la forme

$$(\lambda^2-1)(\lambda^2+2\lambda+5)=0.$$

Cette équation admet comme racines

$$\lambda_1=1, \quad \lambda_2=-1, \quad \lambda_3=-1+2i, \quad \lambda_4=-1-2i.$$

Ici

$$|-1\pm 2i|=\sqrt{5}, \qquad \text{Arg}\,(-1+2i)=\pi-\text{Arctg}\,2.$$

La solution générale de l'équation donnée sera

$$f(n)=C_1+C_2(-1)^n+[C_3\cos n(\pi-\text{Arctg}\,2)+C_4\sin n(\pi-\text{Arctg}\,2)]\,5^{\frac{n}{2}}$$

ou

$$f(n)=C_1+C_2(-1)^n+(-1)^n\,5^{\frac{n}{2}}\,[C_3\cos(n\,\text{Arctg}\,2)-C_4\sin(n\,\text{Arctg}\,2)].$$

Résoudre les équations aux différences suivantes:

998. $3f(n+2)-2f(n+1)-8f(n)=0$.

999. $f(n+3)+3f(n+2)+3f(n+1)+f(n)=0,$
$f(0)=1, \quad f(1)=2, \quad f(2)=3.$

1000. $4f(n+2)-8f(n+1)+5f(n)=0$.

1001. $f(n+3)-8f(n)=0$.

1002. $f(n+4)-f(n+2)+2f(n+1)+2f(n)=0$.

II. RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES LINÉAIRES NON HOMOGÈNES À COEFFICIENTS CONSTANTS. Soit donnée une équation aux différences linéaire non homogène d'ordre k

$$f(n+k)+a_1f(n+k-1)+\ldots+a_kf(n)=g(n) \tag{7}$$

à coefficients réels constants $a_1, \ldots, a_k$. La solution générale de cette équation est donnée par la somme de la solution générale de l'équation homogène correspondante et d'une solution particulière quelconque de l'équation non homogène.

1) Supposons que le second membre $g(n)$ de l'équation (7) est

$$g(n)=r^n u(n),$$

où $u(n)$ est un polynôme en n de degré m, alors que r est un nombre réel.

Si r n'est pas une racine de l'équation caractéristique (2), la solution particulière $\tilde{f}(n)$ doit être cherchée sous la forme

$$\tilde{f}(n)=r^n\tilde{u}(n),$$

où $\tilde{u}(n)$ est un polynôme de degré m; mais si r est une racine de multiplicité j de l'équation (2), alors $\tilde{u}(n)$ est un polynôme de degré $m+j$.

2) Si le second membre $g(n)$ de l'équation (7) s'écrit

$$g(n)=u(n)\sin\alpha n \qquad \text{ou} \qquad g(n)=u(n)\cos\alpha n,$$

la solution particulière sera

$$\tilde{f}(n) = \tilde{u}(n) \sin \alpha n + \tilde{\tilde{u}}(n) \cos \alpha n.$$

3) Si $g(n) = u(n) \operatorname{sh} \alpha n$ ou $g(n) = u(n) \operatorname{ch} \alpha n$, la solution particulière doit être cherchée sous la forme

$$\tilde{f}(n) = \tilde{u}(n) \operatorname{sh} \alpha n + \tilde{\tilde{u}}(n) \operatorname{ch} \alpha n.$$

Ici et au n° 2) $\tilde{u}(n)$ et $\tilde{\tilde{u}}(n)$ sont des polynômes dont le degré est déterminé conformément à la règle exposée au n° 1).

EXEMPLE 5. Trouver la solution générale de l'équation

$$f(n+2) - 4f(n+1) + 3f(n) = 2^n (n+1). \qquad (8)$$

SOLUTION. L'équation caractéristique $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$ admet les racines $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$. La solution générale de l'équation homogène correspondante sera

$$f(n) = C_1 \cdot 3^n + C_2.$$

Etant donné que le nombre 2 ne constitue pas une racine de l'équation caractéristique, la solution particulière de l'équation non homogène doit être cherchée sous la forme

$$\tilde{f}(n) = 2^n (An + B), \qquad (9)$$

où A et B sont des coefficients non déterminés. En substituant (9) dans (8), on obtient

$$2^{n+2}(An + 2A + B) - 4 \cdot 2^{n+1}(An + A + B) + \\ + 3 \cdot 2^n (An + B) = 2^n (n+1)$$

ou

$$4(An + 2A + B) - 8(An + A + B) + 3(An + B) = n + 1.$$

D'ici l'on trouve

$$4A - 8A + 3A = 1,$$
$$8A + 4B - 8A - 8B + 3B = 1,$$

et $A = -1$, $B = -1$.

De cette façon, la solution particulière de l'équation donnée sera

$$\tilde{f}(n) = -2^n (n+1);$$

alors que la solution générale s'écrira

$$f(n) = C_1 \cdot 3^n + C_2 - 2^n (n+1).$$

Trouver les solutions générales des équations aux différences linéaires non homogènes suivantes:

1003. $f(n+2) - 2f(n+1) - f(n) = n$.

1004. $f(n+2) + 2f(n+1) + f(n) = 3^n \cdot 32$, $f(0) = 0$, $f(1) = 0$.

1005. $f(n+2) + f(n) = \sin 2n$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$.

1006. $f(n+3) - 3f(n+2) + 3f(n+1) - f(n) = e^n$.

1007. $f(n+3) + 8f(n) = 2^n$.

III. STABILITÉ DES SOLUTIONS DES ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES. La solution $f^*(n)$ d'une équation aux différences d'ordre k satisfaisant aux conditions initiales

$$f^*(0) = f_0^*, \quad f^*(1) = f_1^*, \ldots, f^*(k-1) = f_{k-1}^*,$$

est appelée *stable* si pour tout $\varepsilon > 0$ il y a un $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que, pour n'importe quelle solution $f(n)$ de l'équation (1) qui vérifie les conditions initiales

$$f(0) = f_0, \quad f(1) = f_1, \ldots, f(k-1) = f_{k-1},$$

de l'ensemble d'inégalités

$$|f_0 - f_0^*| < \delta, \quad |f_1 - f_1^*| < \delta, \ldots, |f_{k-1} - f_{k-1}^*| < \delta$$

on déduit l'inégalité $|f(n) - f^*(n)| < \varepsilon$ pour tout $n \geqslant 0$.

Si, pour un $\delta(\varepsilon) > 0$ aussi petit que l'on veut, l'inégalité $|f(n) - f^*(n)| < \varepsilon$ n'est pas vérifiée pour une solution quelconque $f(n)$, la solution $f^*(n)$ est appelée *instable*.

Si l'inégalité $|f(n) - f^*(n)| < \varepsilon$ est satisfaite et si, en outre, la condition

$$\lim_{n\to\infty} [f(n) - f^*(n)] = 0$$

est vérifiée, la solution $f^*(n)$ est appelée *asymptotiquement stable*.

L'étude de la stabilité de la solution $f^*(n)$ admise par l'équation aux différences linéaire non homogène

$$f(n+k) + a_1 f(n+k-1) + \ldots + a_k f(n) = g(n)$$

au moyen de la substitution $\varphi(n) = f(n) - f^*(n)$ se ramène à l'étude de la stabilité de la solution triviale de l'équation homogène

$$\varphi(n+k) + a_1\varphi(n+k-1) + \ldots + a_k\varphi(n) = 0.$$

Dans la suite, nous allons nous borner à l'étude exclusive des solutions triviales des équations homogènes.

EXEMPLE 6. Compte tenu de la définition de la stabilité d'une équation aux différences, étudier la stabilité de la solution de l'équation

$$2f(n+2) - 2f(n+1) + f(n) = 0, \tag{10}$$

satisfaisant aux conditions initiales $f(0) = 0$, $f(1) = 0$.

SOLUTION. L'équation donnée admet comme solution satisfaisant aux conditions initiales $f(0) = 0$, $f(1) = 0$

$$f(n) \equiv 0,$$

car à partir de (10) on tire

$$f(n+2) = f(n+1) - \frac{1}{2} f(n).$$

Toute solution de cette équation vérifiant les conditions initiales $f(0) = f_0$, $f(1) = f_1$ est de la forme

$$f^*(n) = \frac{2}{2^{n/2}}\left[f_0 \cos\frac{n\pi}{4} + (f_1 - f_0)\sin\frac{n\pi}{4}\right].$$

Prenons un $\varepsilon > 0$ arbitraire et montrons qu'il existe un $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que, pour $|f_0 - 0| < \delta$ et $|f_1 - 0| < \delta$, l'inégalité

$$|0 - f^*(n)| = \frac{1}{2^{n/2}}\left|f_0 \cos\frac{n\pi}{4} + (f_1 - f_0)\sin\frac{n\pi}{4}\right| < \varepsilon$$

soit vérifiée pour tous les $n \geqslant 0$. Conformément à la définition, cela veut dire que la solution nulle $f^*(n) \equiv 0$ est stable.

Il est évident que

$$\frac{\left| f_0 \cos \frac{n\pi}{4} + (f_1 - f_0) \sin \frac{n\pi}{4} \right|}{2^{n/2}} \leqslant \frac{|f_0| + |f_1 - f_0|}{2^{n/2}} \leqslant$$

$$\leqslant |f_0| + |f_1 - f_0| \leqslant |f_0| + |f_1| + |f_0| \leqslant 2(|f_0| + |f_1|)$$

pour tous les $n \geqslant 0$. Pour cette raison, si $|f_0| + |f_1| < \frac{\varepsilon}{2}$, à plus forte raison $|0 - f^*(n)| < \varepsilon$ pour tous les $n \geqslant 0$. Il s'ensuit que, si, par exemple, l'on pose $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{4}$, alors, pour $|f_0| < \delta$ et $|f_1| < \delta$, l'inégalité $|0 - f^*(n)| < \varepsilon$ sera vérifiée pour tous les $n \geqslant 0$, et, par conséquent, la solution nulle de l'équation donnée est stable. La stabilité établie est asymptotique, car

$$\lim_{n\to\infty} [0 - f^*(n)] = -\lim_{n\to\infty} \frac{f_0 \cos \frac{n\pi}{4} + (f_1 - f_0) \sin \frac{n\pi}{4}}{2^{n/2}} = 0.$$

En partant de la définition de la stabilité, étudier la stabilité des solutions nulles des équations aux différences suivantes:

1008. $8f(n+2) + 2f(n+1) - f(n) = 0.$

1009. $f(n+2) + f(n) = 0.$

1010. $4f(n+2) - 4f(n+1) + f(n) = 0.$

1011. $f(n+2) - 6f(n+1) - 7f(n) = 0.$

Pour étudier la stabilité de la solution nulle $f(n) \equiv 0$ de l'équation (1), on fait appel à la règle générale exposée ci-dessous.

1. Si toutes les racines de l'équation caractéristique (2) sont inférieures à l'unité en module, la solution $f(n) \equiv 0$ de l'équation (1) est asymptotiquement stable.

2. Si au moins une racine de l'équation caractéristique est supérieure à l'unité en module, la solution $f(n) \equiv 0$ est instable.

3. Si l'équation caractéristique admet des racines simples à modules égaux à l'unité, tandis que les autres racines (si elles existent) sont inférieures à l'unité en module, alors la solution $f(n) \equiv 0$ est stable mais cette stabilité n'est pas asymptotique.

4. Si l'équation caractéristique admet au moins une racine multiple dont le module est égal à l'unité, la solution $f(n) \equiv 0$ est instable.

La règle ci-dessus ramène la question de la stabilité de la solution nulle admise par l'équation (1) à l'établissement des modules des racines que possède l'équation caractéristique (2).

EXEMPLE 7. Etudier la stabilité de la solution nulle $f(n) \equiv 0$ de l'équation

$$2f(n+2) - 2f(n+1) + f(n) = 0.$$

SOLUTION. On forme l'équation caractéristique

$$2\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0,$$

qui admet comme racines $\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm i}{2}$. On a

$$|\lambda_{1,2}| = \left| \frac{1 \pm i}{2} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1.$$

On voit donc que la solution $f(n) \equiv 0$ de cette équation est asymptotiquement stable.

EXEMPLE 8. Etudier la stabilité de la solution nulle de l'équation

$$f(n+2) - 2f(n+1) + 5f(n) = 0.$$

SOLUTION. L'équation caractéristique

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$$

admet comme racines

$$\lambda_1 = 1 + 2i, \qquad \lambda_2 = 1 - 2i.$$

On a

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = |1 \pm 2i| = \sqrt{5} > 1.$$

Les deux racines sont supérieures à l'unité en module, ce qui indique que la solution $f(n) \equiv 0$ est instable.

On sait que la fonction

$$\lambda = \frac{w+1}{w-1}$$

applique l'intérieur du disque unité du plan des λ sur le demi-plan gauche du plan des w. Aux racines de l'équation caractéristiques (2) disposées à l'intérieur du disque unité $|\lambda| < 1$ (elles sont donc inférieures à l'unité en module) on mettra en correspondance les racines de l'équation transformée

$$(w+1)^k + a_1 (w+1)^{k-1} (w-1) + \ldots + a_k (w-1)^k = 0$$

ou

$$b_0 w^k + b_1 w^{k-1} + \ldots + b_n = 0, \tag{11}$$

qui se trouvent dans le demi-plan gauche du plan des w.

La question concernant la disposition des racines de l'équation (11) peut être résolue à l'aide du critère de Routh-Hurwitz ou du critère de Mikhaïlov.

EXEMPLE 9. Trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que les solutions de l'équation caractéristique

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0 \tag{12}$$

soient disposées dans le disque unité $|\lambda| < 1$.

SOLUTION. On pose $\lambda = \frac{w+1}{w-1}$. Alors l'équation (12) prend la forme

$$(w+1)^2 + a_1 (w+1)(w-1) + a_2 (w-1)^2 = 0$$

ou

$$1 \quad a_1 + a_2) w^2 + (2 - 2a_2) w + (1 - a_2 + a_2) = 0. \tag{13}$$

On applique le critère de Routh-Hurwitz (cf. § 26) au polynôme (13). La matrice de Hurwitz est de la forme

$$\begin{pmatrix} 2-2a_2 & 1+a_1+a_2 \\ 0 & 1-a_1+a_2 \end{pmatrix}.$$

Les mineurs diagonaux principaux de la matrice de Hurwitz sont

$$\Delta_1 = 2 - 2a_2, \qquad \Delta_2 = (2 - 2a_2)(1 - a_1 + a_2).$$

En vertu du critère indiqué ci-dessus, on doit avoir

$$1 + a_1 + a_2 > 0, \qquad 1 - a_2 > 0, \qquad 1 - a_1 + a_2 > 0. \tag{14}$$

On voit donc que l'équation caractéristique (12) admet des racines dans le disque $|\lambda| < 1$ si, et seulement si, les conditions (14) sont satisfaites.

COROLLAIRE. Une équation aux différences linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants

$$f(n+2) + a_1 f(n+1) + a_2 f(n) = 0$$

admet une solution nulle $f(n) \equiv 0$ asymptotiquement stable si, et seulement si, ses coefficients satisfont aux conditions (14).

EXEMPLE 10. Etudier la stabilité de la solution nulle $f(n) \equiv 0$ de l'équation

$$2f(n+2) - 2f(n+1) + f(n) = 0.$$

SOLUTION. Ecrivons cette équation comme suit

$$f(n+2) - f(n+1) + \frac{1}{2} f(n) = 0.$$

Ici $a_1 = -1$, $a_2 = 0{,}5$. Donc

$$1 + a_1 + a_2 = 0{,}5 > 0,$$
$$1 - a_2 = 0{,}5 > 0,$$
$$1 - a_1 + a_2 = 2{,}5 > 0.$$

Les conditions (14) du critère de Routh-Hurwitz sont satisfaites. Cela signifie que la solution $f(n) \equiv 0$ est asymptotiquement stable.

EXEMPLE 11. Etudier la stabilité de la solution nulle de l'équation

$$f(n+2) + f(n+1) + 2f(n) = 0.$$

SOLUTION. Ici $a_1 = 1$, $a_2 = 2$. Donc

$$1 + a_1 + a_2 = 4 > 0,$$
$$1 - a_2 = -1 < 0.$$

La solution nulle est instable.

Indiquer les conditions nécessaires et suffisantes pour que les solutions nulles des équations aux différences suivantes soient asymptotiquement stables:

1012. $a_0 f(n+3) + a_1 f(n+2) + a_2 f(n+1) + a_3 f(n) = 0.$

1013. $f(n+4) + pf(n+2) + qf(n) = 0.$

1014. $f(n+5) + pf(n) = 0.$

1015. $af(n+5) - bf(n) = 0,\ a \neq 0,\ b > 0.$

En utilisant le critère de Routh-Hurwitz, étudier la stabilité des solutions nulles des équations aux différences suivantes:

1016. $11f(n+4) - 8f(n+3) + 8f(n+2) - 4f(n+1) + f(n) = 0.$

1017. $f(n+4) + f(n+3) + f(n) = 0.$

1018. $12f(n+4) - 3f(n+3) + 2f(n+2) + 2f(n+1) - 2f(n) = 0.$

1019. $7f(n+4) - 4f(n+3) + 30f(n+2) - 4f(n+1) + 3f(n) = 0.$

1020. $f(n+5) - f(n+1) + f(n) = 0.$

1021. $f(n+5) - f(n+2) - f(n) = 0.$

1022. $f(n+5) + f(n+1) - f(n) = 0.$

RÉPONSES

2. $x=\frac{20}{17}$, $y=-\frac{36}{17}$. 3. $x=\frac{-b}{a^2+b^2}$, $y=\frac{-a}{a^2+b^2}$.

4. Il n'y a pas de solution réelle. 5. $\frac{2(a^2-b^2)}{(a^2+b^2)^2}$.

7. $x=\frac{u^2+v^2-u}{(1-u)^2+v^2}$, $y=-\frac{v}{(1-u)^2+v^2}$.

8. $z_1=0$, $z_2=1$, $z_3=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_4=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

9. a) $\rho=5$, $\varphi=\operatorname{Arctg}\frac{3}{4}$; b) $\rho=4$, $\varphi=\frac{2}{3}\pi$; c) $\rho=5\sqrt{2}$, $\varphi=\operatorname{Arctg}\frac{1}{7}-\pi$; d) $\rho=1$, $\varphi=\frac{4}{5}\pi$; e) $\rho=5$, $\varphi=-\operatorname{Arctg}\frac{3}{4}$; f) $\rho=1$, $\varphi=2\pi-\alpha$.

10. a) $2(\cos\pi+i\sin\pi)$; b) $2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$; c) $2\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$; d) $\sqrt{2(1-\sin\alpha)}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)\right]$; e) $1(\cos\alpha+i\sin\alpha)$; f) $2e^{i\pi}$; g) $1\cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$; h) $1\cdot e^{-i\frac{\pi}{2}}$; i) $2e^{-\frac{2\pi}{3}i}$; j) $1\cdot e^{\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)i}$; k) $\sqrt{34}e^{i\operatorname{Arctg}\frac{3}{5}}$.

11. INDICATION. Etant donné que $x^2-2\lambda x\cos\alpha+\lambda^2=[x-\lambda(\cos\alpha+i\sin\alpha)][x-\lambda(\cos\alpha-i\sin\alpha)]$, il faut montrer que $f[\lambda(\cos\alpha\pm i\sin\alpha)]=0$.

12. a) $-2^{19}(1+i\sqrt{3})$; b) $2^{10}(1+i)$; c) 1728; d) 1.

13. INDICATION. Utiliser la relation

$$\frac{1+i\operatorname{tg}\alpha}{1-i\operatorname{tg}\alpha}=\frac{\cos\alpha+i\sin\alpha}{\cos(-\alpha)+i\sin(-\alpha)}$$

et appliquer la formule de Moivre au numérateur et au dénominateur.

15. a) $3\cos^2\varphi\sin\varphi-\sin^3\varphi$; b) $\cos^3\varphi-3\cos\varphi\sin^2\varphi$; c) $4\sin\varphi\cos^3\varphi-4\cos\varphi\sin^3\varphi$; d) $\cos^4\varphi-6\cos^2\varphi\sin^2\varphi+\sin^4\varphi$; e) $5\sin\varphi\cos^4\varphi-10\cos^2\varphi\sin^3\varphi+\sin^5\varphi$; f) $\cos^5\varphi-10\cos^3\varphi\sin^2\varphi+5\cos\varphi\sin^4\varphi$.

16. a) $\pm\frac{1\pm i}{\sqrt{2}}$; b) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$; c) $\frac{1}{2}(\pm\sqrt{3}+i)$, $-i$; d) $\pm\left(\cos\frac{\pi}{8}-i\sin\frac{\pi}{8}\right)$, $\pm\left(\cos\frac{3}{8}\pi+i\sin\frac{3}{8}\pi\right)$.

17. a) ± 1, $\pm i$; b) $\frac{\sqrt[3]{4}}{2}(1+i)$, $\sqrt[6]{2}\left(-\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$, $\sqrt[6]{12}\left(\sin\frac{\pi}{12}-i\cos\frac{\pi}{12}\right)$; c) $\pm(\sqrt{3}-i)$.

18. $\sqrt[10]{2}(\cos 6°+i\sin 6°)$; $\sqrt[10]{2}(\cos 78°+i\sin 78°)$; $\sqrt[10]{2}(\cos 150°+$ $+i\sin 150°)$; $\sqrt[10]{2}(\cos 222°+i\sin 222°)$; $\sqrt[10]{2}(\cos 294°+i\sin 294°)$.

19. a) Tout le plan complexe dans lequel on a découpé un disque de rayon 2 centré à l'origine des coordonnées. b) Un disque de rayon $r = 1$ centré à l'origine des coordonnées et privé de son centre (le disque est « percé »). c) Tout le plan complexe privé d'un disque de rayon $r = 1/2$ centré sur l'origine des coordonnées.

20. a) Une circonférence de rayon $r = 8$ et de centre au point $z = 5i$. b) Un disque avec sa frontière, de rayon $r = 4$ et de centre au point $z = 1 + i$.

21. a) La portion de couronne comprise entre deux demi-droites $\operatorname{Arg} z = \pi/4$ et $\operatorname{Arg} z = \pi/2$ et deux circonférences de rayons $r = 1$ et $r = 2$ centrées au point $z = -i$. b) La portion de couronne comprise entre deux demi-droites $\operatorname{Arg} z = \frac{\pi}{8}$ et $\operatorname{Arg} z = \frac{4}{3}\pi$ et deux circonférences de rayons $r = 2$ et $r = 3$ centrées au point $z = 0$. L'ensemble inclut également la partie de la demi-droite $\operatorname{Arg} z = \frac{4}{3}\pi$ située entre les circonférences indiquées ci-dessus et la partie de la circonférence de rayon $r = 3$ comprise entre les demi-droites citées.

22. a) Le demi-plan droit y compris l'axe OY. b) Une bande déterminée par les droites $y = 0$ et $y = 1$ y compris ces droites.

23. a) Une couronne concentrique bornée par les circonférences de rayons $R_1 = 1$ et $R_2 = 2$ de centre au point $z_0 = -(2 + i)$. Les deux circonférences appartiennent à l'ensemble. b) La partie du plan disposée au-dessous de la droite $y = x$. c) Une bande comprise entre les droites $x = 1$ et $x = 2$.

24. L'intérieur du cercle unité.

25. a) L'extérieur de la parabole $y = \frac{x^2}{4} - 1$. b) Le demi-axe réel positif y compris le point $(0, 0)$.

26. L'intérieur de l'hyperbole $xy = -\frac{1}{2}$.

27. Le domaine annulaire compris entre les ellipses $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ et $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{15}=1$ y compris les ellipses elles-mêmes.

28. a) L'intérieur de la circonférence $x^2 + (y - 1)^2 = 1$. b) Le domaine compris entre les circonférences

$$(x-1)^2+(y-1)^2=2 \text{ et } (x-2)^2+(y-2)^2=8.$$

29. La droite $x = -2$. 30. La droite $y = 2$.

31. a) L'hyperbole $xy = 1$. b) L'hyperbole $x^2 - y^2 = 1$. c) La circonférence $x^2 + (y + 1)^2 = 1$.

32. a) La circonférence $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$. b) L'hyperbole $xy=-1$.

33. L'hyperbole $x^2-y^2=\frac{1}{2}$.

34. La circonférence $(x+1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$.

35. a) L'ellipse $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$. b) La demi-droite confondue avec l'axe OY et comprise entre -1 et $-\infty$.

36. a) L'hyperbole $\frac{\left(y+\frac{9}{4}\right)^2}{\left(\frac{3}{4}\right)^2}-\frac{x^2}{\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}=1$. b) L'ellipse

$$\frac{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}{\left(\frac{9}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{(3\sqrt{2})^2}=1.$$

37. a) La circonférence $x^2+y^2=1$. b) Une droite perpendiculaire au segment z_1z_2 et qui passe par son milieu. c) L'hyperbole $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-y^2=\frac{1}{4}$. d) La parabole $y^2=2x+1$.

38. a) $\bar{z}-z=0$ et $\bar{z}+z=0$; b) $z+\bar{z}+i(z-\bar{z})=0$; c) $k(z+\bar{z})+2b+$ $+i(z-\bar{z})=0$.

39. a) $z^2+\bar{z}^2=2a^2$; b) $z\bar{z}+z+\bar{z}=0$.

40. $-(1+\sqrt[3]{2})$; $-1+\frac{\sqrt[3]{2}}{2}\pm i\frac{\sqrt[3]{2}\sqrt{3}}{2}$.

41. -1; 3; $1\pm 2i$. **42.** $z=\frac{2z_1+z_2}{3}$. **43.** $b+ai$. **44.** $-3-$ $-i\sqrt{3}$. **45.** $\sqrt{3}-i$.

46. SOLUTION. D'après la condition imposée, on a

$$(4-3i)(\cos\varphi+i\sin\varphi)=\frac{5}{\sqrt{2}}(-1+i)$$

ou

$$\begin{cases} 4\cos\varphi+3\sin\varphi=-\frac{5}{\sqrt{2}}, \\ -3\cos\varphi+4\sin\varphi=\frac{5}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

D'où $\sin\varphi=\frac{\sqrt{2}}{10}$, $\cos\varphi=-\frac{7\sqrt{2}}{10}$, c'est-à-dire $\operatorname{tg}\varphi=-\frac{1}{7}$, donc, $\varphi=-\operatorname{Arctg}\frac{1}{7}$.

47. $\varphi=\frac{3}{4}\pi$. **48.** $x_k=\operatorname{cotg}\frac{k\pi}{n}$ $(k=1, 2, \ldots, n-1)$.

49. $x_k=\frac{\pi}{4}+k\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. **50.** $-\sqrt{2}+i7\sqrt{2}$.

51. $z_1=3+i$, $z_2=1+3i$, $z_3=-1+i$.

53. SOLUTION. Considérons la somme

$$S_n=(\cos x+i\sin x)+(\cos 2x+i\sin 2x)+\ldots+(\cos nx+i\sin nx).$$

En appliquant la formule de Moivre, on obtient

$$S_n=(\cos x+i\sin x)+(\cos x+i\sin x)^2+\ldots+(\cos x+i\sin x)^n.$$

C'est la somme des n premiers termes d'une progression géométrique ayant comme dénominateur $q=\cos x+i\sin x$ et en qualité de premier terme $a_1=$ $=\cos x+i\sin x$. Cette somme est égale à

$$S_n=\frac{(\cos x+i\sin x)-(\cos nx+i\sin nx)(\cos x+i\sin x)}{1-(\cos x+i\sin x)}.$$

En séparant les parties réelle et imaginaire, on obtient

$$S_n=\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cos\frac{(n+1)x}{2}+i\,\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\sin\frac{(n+1)x}{2}.$$

D'où

a) $\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx=\dfrac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\sin\dfrac{(n+1)x}{2}$;

b) $\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx=\dfrac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cos\dfrac{(n+1)x}{2}$.

54. a) $\dfrac{\sin^2 nx}{\sin x}$; b) $\dfrac{\sin 2nx}{2\sin x}$.

55. a) $u=x+2xy$, $v=y^2-x^2-y$; b) $u=x^2-y^2$, $v=1+2xy$; c) $u=$ $=3xy^2-x^3$, $v=1-3x^2y+y^3$; d) $u=\dfrac{x}{x^2+y^2}$, $v=\dfrac{y}{x^2+y^2}$; e) $u=$ $=\dfrac{x-2xy-y+1}{(x+1)^2+y^2}$, $v=\dfrac{x^2+y-y^2+x}{(x+1)^2+y^2}$; f) $u=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, $v=-\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$.

56. a) $w=-1$; b) $w=-3-4i$; c) $w=\dfrac{1+i}{2}$; d) $w=-\dfrac{5+12i}{13}$.

57. a) La circonférence $u^2+v^2=4$ parcourue dans le sens horaire. b) L'axe Ov (sauf le point O) parcouru comme suit: de 0 à $+\infty$, ensuite, de $-\infty$ à 0. c) La demi-droite dirigée suivant la bissectrice du III[e] quadrant et allant de ∞ à 0. d) La demi-droite dirigée suivant la bissectrice du I[er] quadrant et allant

de ∞ à 0. e) La bissectrice du IIe quadrant parcourue de 0 à ∞ et la bissectrice du IVe quadrant parcourue de ∞ à 0. f) Le demi-axe réel positif parcouru de $+\infty$ à 0.

58. a) L'axe OX est transformé en l'axe OU, de plus, lorsque x varie de $-\infty$ à $+\infty$, l'axe OU est parcouru de $+1$ à $-\infty$ et de $+\infty$ à $+1$ (le point 1 est exclu). L'axe OY est transformé en la circonférence $u^2+v^2=1$. b) L'axe OX est transformé en l'axe OU (cf. point a) ci-dessus). L'axe OY est transformé en la droite $u=1$ parcourue de $+1$ à $1+i\infty$ et de $1-i\infty$ à $+1$ (le point 1 est exclu).

59. a) $u=2x-1$, $v=2y$; b) $u=x^2-y^2+x$, $v=(2x+1)y$; c) $u=\frac{x}{x^2+y^2}$, $v=-\frac{y}{x^2+y^2}$.

60. a) $u=e^{-x}\cos y$, $v=-e^{-x}\sin y$; b) $u=e^{x^2-y^2}\cos 2xy$, $v=-e^{x^2-y^2}\sin 2xy$; c) $u=\sin x \operatorname{ch} y$, $v=\cos x \operatorname{sh} y$; d) $u=\operatorname{ch} x\cos(y-1)$, $v=\operatorname{sh} x\sin(y-1)$.

61. a) $$\begin{cases} u=e^{(x^2-y^2)\ln 2-4k\pi xy}\cos[2k\pi(x^2-y^2)+2\ln 2\cdot xy], \\ v=e^{(x^2-y^2)\ln 2-4k\pi xy}\sin[2k\pi(x^2-y^2)+2\ln 2\cdot xy] \end{cases}$$

$$(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots);$$

b) $u=\operatorname{ch} x\cos y$, $v=\operatorname{ch} x\sin y$; c) $u=\frac{\sin x\cos x}{\operatorname{ch}^2 y-\sin^2 x}$, $v=\frac{\operatorname{sh} y\operatorname{ch} y}{\operatorname{ch}^2 y-\sin^2 x}$.

62. a) $\rho=3/4$, $\varphi_0=-\pi/2$; b) $\rho=5/4$, $\varphi_0=\pi$.

63. $\rho=\operatorname{ch} 1$, $\varphi_0=\pi/2$. 64. $\rho=\pi$, $\varphi_0=-\pi/2$. 65. $\rho=\cos^2(\ln 3)$, $\varphi_0=0$.

66. a) $1+2k\pi i$. Ici et dans la suite s'il n'y a pas d'indications contraires, $k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$; b) $\left(2k-\frac{1}{2}\right)\pi i$; c) $\left(2k+\frac{1}{2}\pi i\right)$; d) $\ln\sqrt{2}+\left(2k-\frac{3}{4}\right)\pi i$; e) $\ln\sqrt{13}+\left(2k\pi-\operatorname{Arctg}\frac{2}{3}\right)i$; f) $-\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi+2m\pi\cdot i$ $(k,\ m=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$.

67. a) $e^{-\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi}$; b) $e^{\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi}$; c) $e^{-2k\pi}$; d) $e^{\sqrt{2}(2k+1)\pi i}$; e) $e^{-\left(4k+\frac{1}{2}\right)\pi}$; f) $e^{(i-1)\left(2k+\frac{1}{6}\right)\pi}$; g) $2^{3/2}e^{3\left(2k\pi-\frac{\pi}{4}\right)-3\left(\frac{\pi}{4}+\ln\sqrt{2}-2k\pi\right)i}$.

68. a) $\rho=0$, φ n'est pas déterminé; b) $\rho=e^{-2k\pi}$, $\varphi=\ln 10+2m\pi$ $(k,\ m=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$; c) $\rho=9e^{2k\pi}$, $\varphi=-\ln 3+2m\pi$ $(k,\ m=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$.

69. a) $\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}$; b) $\frac{1}{2}\ln 2-\frac{3}{4}\pi i$.

70. a) $i\operatorname{sh}\pi$; b) $\operatorname{ch}\pi$; c) $i\operatorname{th}\frac{\pi}{2}$.

71. a) $-i\operatorname{coth}\pi$; b) $2k\pi-i\ln(\sqrt{2}-1)$, $(2k+1)\pi-i\ln(\sqrt{2}+1)$;

c) $\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi - i\ln(\sqrt{2}+1)$, $\left(2k-\frac{1}{2}\right)\pi - i\ln(\sqrt{2}-1)$.

72. a) $k\pi + i\frac{\ln 2}{2}$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$; b) i; c) 0.

73. $z_k=(2k+1)\pi i$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

74. $z_k=\left(2k-\frac{1}{2}\right)\pi i$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

75. $z_k=(2k+1)\pi \pm i\ln 2$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

76. $z_k=\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

77. $z_{2k}=2k\pi - i\ln(\sqrt{\pi^2+1}-\pi)$,

$z_{2k+1}=(2k+1)\pi - i\ln(\sqrt{\pi^2+1}+\pi)$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

78. $x=0$.

79. $z_{2k}=2k\pi i$, $z_{2k+1}=(2k+1)\pi i+\ln 3$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

80. $z_k=\ln(1+\sqrt{2})+\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi i$, $z_k=\ln(\sqrt{2}-1)+\left(2k-\frac{1}{2}\right)\pi i$ $(k=$
$=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

81. a) $z = 1 - i$; b) $z = -e + i$. 82. 1.
83. 0. 84. Il n'y a pas de limite. 85. 0. 86. 1/3.
87. $-i$. 88. i. 89. Il n'y a pas de limite. 90. 0.
94. i. 95. $\sqrt{2}$. 96. $-i$. 97. $-2i$.
104. a) Non. b) Oui. c) Non. d) Oui. e) Non. f) Oui.
105. a) Non. b) Non. c) Non. d) Oui.

109. INDICATION. Pour deux directions quelconques caractérisées par les vecteurs unités s^0 et n^0 liés entre eux par la relation $n^0 = is^0$, les conditions généralisées de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial v}{\partial n}, \quad \frac{\partial v}{\partial s}=-\frac{\partial u}{\partial n} \tag{1}$$

ont lieu. Pour obtenir les conditions de Cauchy-Riemann en coordonnées polaires

$$\frac{\partial u}{\partial \rho}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial v}{\partial \rho}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}, \tag{2}$$

il faut prendre en qualité de s^0 le vecteur unité de la tangente à la circonférence $|z| = \rho$ dirigé dans le sens antihoraire, et en qualité de n^0, le vecteur de la normale intérieure à la circonférence. Il faut en outre avoir en vue que

$$\frac{\partial}{\partial n}=-\frac{\partial}{\partial \rho}, \quad \frac{\partial}{\partial s}=\frac{\partial}{\rho\,\partial \varphi}.$$

Alors il est aisé d'obtenir (2) à partir de (1). Remarquons que les conditions de Cauchy-Riemann en coordonnées cartésiennes

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$$

s'obtiennent à partir de (1) pour

$$s^0 = 1, \quad n^0 = i.$$

114. a) $f(z) = \frac{1}{z}$; b) $f(z) = \ln z$; c) $f(z) = z^2 + 2z$.

115. a) $f(z) = 2 \operatorname{sh} z - z^2$; b) $f(z) = 2 \sin z - z$; c) $f(z) = 4 \operatorname{ch} z + z^2 - 1$.

116. a) $f(z) = 2 \cos 2z + z$; b) $f(z) = 2i(\cos z - 1) - iz^2 + 2$.

118. a) Oui. b) Non. c) Oui. d) Non.

119. $a + c = 0$.

120. a) Non. b) Oui. c) Non. d) Oui.

122. $f(u) = c_1 u + c_2$; c_1 et $c_2 = \text{const.}$

123. a) Non. b) Oui. c) Oui. INDICATION. Montrer que la fonction $\ln w$ est analytique dans le domaine D.

125. a) Oui. b) Non. c) Non. **126.** $u = c_1(ax + by) + c_2$.

127. $u = c_1 xy + c_2$. **128.** $u = c_1 \operatorname{Arctg} \frac{y}{x} + c_2$.

129. $u + c_1(x^2 - y^2) + c_2$.

130. $u = c_1 \sqrt{x + \sqrt{x^2 + y^2}} + c_2$, c_1 et c_2 étant des constantes arbitraires.

131. $u = c_1 \frac{x}{x^2 + y^2} + c_2$.

132. a) $r_1 = 2$, $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$; $r_2 = \frac{1}{e}$; $\varphi_2 = -\frac{\pi}{2}$; b) $r_1 = 1$, $\varphi_1 = 0$; $r_2 = \sqrt{\operatorname{ch}^2 1 - \sin^2 1}$, $\varphi_2 = -\operatorname{Arctg}(\operatorname{tg} 1 \cdot \operatorname{th} 1)$; c) $r_1 = 15$, $\varphi_1 = -\operatorname{Arctg} \frac{4}{3}$; $r_2 = 3\left(1 + \frac{\pi^2}{4}\right)$, $\varphi_2 = \pi - \operatorname{Arctg} \frac{4\pi}{\pi^2 - 4}$.

133. a) Le demi-plan $\operatorname{Re} z > 0$ se dilate, alors que le demi-plan $\operatorname{Re} z < 0$ se contracte.

b) En tout point z (sauf $z = 0$) situé à l'intérieur de la circonférence $|z| = 1$ il y a dilatation, tandis que pour les points disposés en dehors de cette circonférence, on assiste à une contraction.

c) Voir le point b) ci-dessus.

d) La partie du plan complexe disposée à l'intérieur de la circonférence $|z| = 1/\sqrt{3}$ se contracte, alors que la partie du plan qui se trouve en dehors de cette circonférence se dilate.

134. $S_{\tilde{D}} = 8/3$, $l_w = 2(1 + \sqrt{2}) + \ln(3 + 2\sqrt{2})$.

135. $S_{\tilde{D}} = \frac{x_2 - x_1}{4}(\operatorname{sh} 2y_2 - \operatorname{sh} 2y_1) - \frac{y_2 - y_1}{4}(\sin 2x_2 - \sin 2x_1)$.

136. $7{,}5\pi$. **137.** $\sqrt{2}(e^{2\pi} - 1)$.

138. Le rectangle donné est transformé en la couronne $e \leqslant |w| \leqslant e^2$ dont la surface est égale à $\pi(e^4 - e^2)$. D'après la formule (9), on obtient $4(e^4 - e^2)$. L'erreur est entraînée par le fait que, pour les conditions formulées, l'application n'est pas biunivoque.

139. 1/2. **140.** $-\frac{\pi}{2}$. **141.** $\frac{1}{4}(e^2 - 1)(1 + i)$.

142. a) $2\pi i$; b) $-2\pi i$. **143.** 0. **144.** 0. **145.** $(i - 1)e^i$.

146. a) $2 + i$; b) $6 + 2i$. **147.** $-2(1 + i)$. **148.** -1. **149.** $\frac{3}{5}(i - 1)$.

150. a) $e \cos 1 - 1 + ie \sin 1$; b) $e \cos 1 - 1 + ie \sin 1$.

151. $-(1+i\,\mathrm{sh}\,1)$. **152.** a) $2(i-1)$; b) $2\sqrt{2}\,i$.

153. $2\sqrt{2}-4+i2\sqrt{2}$. **154.** $-7e^{-2}+(3-2i)\,e^{i}$. **155.** $e^{-1}-1$.

156. $\cos 1-\sin 1-ie^{-1}$. **157.** $1-\cos 1+i(\sin 1-1)$.

158. $-\frac{1}{8}\left(\frac{\pi^2}{4}+3\ln^2 2\right)+i\frac{\pi}{8}\ln 2$. **159.** $-\frac{\pi^2}{8}$.

160. $\frac{1}{4}[1-\cos(2+2i)]$. **161.** $-\left(\mathrm{tg}\,1+\frac{1}{2}\mathrm{tg}^2 1+\frac{1}{2}\mathrm{th}^2 1\right)+i\,\mathrm{th}\,1$.

162. $\sqrt{2\,\mathrm{sh}\,1}+i(\sqrt{2\,\mathrm{sh}\,1}-2\sqrt{\sin 1})$.

163. $\left(\frac{1}{4}\mathrm{sh}\,2+\frac{1}{2}\right)i$. **164.** $-\frac{4}{3}$. **165.** 0.

166. $-\ln\sqrt{\mathrm{sh}^2 1+\cos^2 1}+i\,\mathrm{Arctg}(\mathrm{tg}\,1\cdot\mathrm{th}\,1)$.

167. πi. **168.** πe^{-1}. **169.** $\frac{\pi}{2}i$. **170.** $\pi\,\mathrm{sh}\,1$.

171. 0. **172.** $\frac{2}{3}\pi\,\mathrm{ch}\,\pi\cdot i$. **173.** 0. **174.** $-\frac{\pi}{45}i$.

175. π. **176.** 0. **177.** $-\pi i$. **178.** $2\pi i$.

179. $-\frac{\pi(\pi+2)\sqrt{2}}{8}i$. **180.** 0. **181.** $-\frac{\pi i}{27}$. **182.** $-\frac{\pi^2}{2}\mathrm{sh}\,1$.

183. $\pi^3 i$. **184.** 0. **185.** $-2\pi i$. **186.** $-\frac{1+i}{2}e^{i}$.

187. La série diverge. **188.** La série converge.
189. La série converge. **190.** La série converge. **191.** La série diverge. **192.** La série converge absolument. **193.** La série converge. **194.** La série diverge. **195.** La série converge. **196.** La série diverge.

197. $R=1$. **198.** $R=1$. **199.** $R=\sqrt{2}$. **200.** $R=\infty$.
201. $R=1$. **202.** $R=\infty$. **203.** $R=1$. **204.** $R=1$.
205. $R=1$. **206.** $R=\infty$. **207.** $R=1$. **208.** e^{-1}.

209. a) et b) $R\geqslant\frac{r+r'-|r-r'|}{2}$; c) $R\geqslant rr'$; d) $R\leqslant\frac{r}{r'}$.

210. $-\sin 1+2(z+1)\cos 1+\frac{2^2}{2!}(z+1)^2\sin 1-\frac{2^3}{3!}(z+1)^3\cos 1-\ldots$, $R=\infty$.

211. $\frac{1}{\sqrt{2}}\left[1+\left(z+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2!}\left(z+\frac{\pi}{4}\right)^2-\frac{1}{3!}\left(z+\frac{\pi}{4}\right)^3+\ldots\right], R=\infty$.

212. $\sqrt{e}\left[1+\frac{1}{2}(2z-1)+\frac{1}{2!2^2}(2z-1)^2+\frac{1}{3!2^3}(2z-1)^3+\ldots\right]$, $R=\infty$.

213. $-\frac{1}{5}\left[1+\frac{3}{5}(z+2)+\frac{3^2}{5^2}(z+2)^2+\frac{3^3}{5^3}(z+2)^3+\ldots\right]$, $R=\frac{5}{3}$.

214. $-\frac{1}{5}-\frac{9}{25}z-\frac{41}{125}z^2-\ldots$, $R=1$.

215. $-iz+z^3+iz^5-z^7-\ldots$, $R=1$.

216. $1+\frac{1}{2}\left(\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\dots\right)$, $R=\infty$.

217. $\frac{1}{2}\left(\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{z^6}{6!}+\dots\right)$, $R=\infty$.

218. $\ln 2-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2\cdot 4}+\frac{z^3}{3\cdot 8}+\dots\right)$, $R=2$.

219. $\ln 2+\frac{z}{2}-\frac{5z^2}{2\cdot 4}+\frac{7z^3}{3\cdot 8}-\dots$, $R=1$.

220. $\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}z+\frac{1}{3!\,2^3}z^3+\frac{3}{5!\,2^3}z^5+\dots$, $R=\pi$.

221. $\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}z+\frac{1}{2!\,2^2}z^2-\frac{1}{3!\,2^3}z^3+\dots$, $R=\sqrt{\ln^2(2-\sqrt{3})+\pi^2}$.

222. $\frac{1}{6}+\frac{1}{6^2}z-\frac{4}{2!\,6^3}z^2+\frac{1}{3!\,6^3}z^3+\dots$, $R=\sqrt{\ln^2 5+\pi^2}$.

223. $\ln 2-\frac{1}{2}z+\frac{1}{2!\,2^2}z^2-\frac{1}{4!\,2^3}z^4+\dots$, $R=\pi$.

224. $-\frac{1}{2!}z^2-\frac{2}{4!}z^4-\frac{16}{6!}z^6+\dots$, $R=\frac{\pi}{2}$.

225. $\ln 2-\frac{z^2}{4}-\frac{z^4}{4\cdot 4!}-\frac{1}{2\cdot 6!}z^6+\dots$, $R=\pi$.

226. $e\left(1+z+\frac{3}{2!}z^2+\frac{13}{3!}z^3+\dots\right)$, $R=1$.

227. $f(z)=\frac{1}{a-z}$, $|z|<1$. 229. $|z|>1/\sqrt{2}$.

230. $|z|>2$. 231. $|z|>e^{-1}$. 232. $|z|>e$.

233. $|z+1|>1/4$. 234. $|z-2-i|>1/2$.

235. $|z+2i|>3$. 236. $|z+1-i|>1$.

237. $|z+1+i|<1$. 238. $|z-i|<2$. 239. $0<|z-2+i|<1$.

240. $2<|z|<4$. 241. La série diverge partout. 242. $1<|z|<2$.

243. $|z-i|>e$. 244. $1<|z|<2$. 245. $|z+1|>2$.

246. $0<|z-i|<2$. 247. $0<|z|<1$. 248. $0<|z-1|<1$.

249. 1) Si $|a|>|b|$, la série diverge partout; 2) si $|a|<|b|$, la série converge dans la couronne $|a|<|z|<|b|$.

250. $\frac{1}{z}-\frac{z}{3!}+\frac{z^3}{5!}-\frac{z^5}{7!}+\dots$ 251. $\frac{2}{2!}z-\frac{8}{4!}z^3+\frac{32}{6!}z^5-\dots$

252. $\frac{1}{z}+1+\frac{z}{2!}+\frac{z^2}{3!}+\dots$ 253. $\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{2!\,z}+\frac{1}{3!}+\frac{z}{4!}+\dots$

254. $z^3+z^2+\frac{z}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!\,z}+\dots$ 255. $z^4-\frac{z^2}{2!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{6!\,z^2}+\dots$

256. $\frac{4^2}{2!\,2z^3}-\frac{4^4}{4!\,2z^5}+\frac{4^6}{6!\,2z^7}-\dots$ 257. $\frac{1}{2!}-\frac{z^2}{4!}+\frac{z^4}{6!}-\frac{z^6}{8!}+\dots$

258. $1+\frac{z}{2!}+\frac{z^2}{3!}+\frac{z^3}{4!}+\dots$ 259. $\frac{2}{z^4}-\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{4!}-\frac{z^2}{6!}+\dots$

260. $\frac{1}{z^2}-\frac{1}{2!z}+\frac{1}{3!}-\frac{z}{4!}+\dots$ 261. $\frac{1}{z+1}-\frac{1}{(z+1)^2}$.

262. $\frac{\sin 2}{z-2}-\frac{\sin 2}{2!}(z-2)-\frac{\cos 2}{3!}(z-2)^2+\frac{\sin 2}{4!}(z-2)^3+\frac{\cos 2}{5!}(z-2)^4-\dots$

263. $(1-i)+(z+i)+\left(\frac{1}{2!}-\frac{i}{1!}\right)\frac{1}{z+i}+\left(\frac{1}{3!}-\frac{i}{2!}\right)\frac{1}{(z+i)^2}+\dots=$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(n+1)!}-\frac{i}{n!}\right](z+i)^{-n}.$$

264. a) $-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{z^n}-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}-2^{n-1}}{z^n}$.

265. a) $\frac{1}{z}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$; b) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{n+2}}$.

266. a) La fonction n'est pas développable.

b) $\frac{1}{5}\left(\frac{2^2+1}{z^3}-\frac{2^3+2}{z^4}+\frac{2^4-1}{z^5}-\frac{2^5-2}{z^6}+\dots\right)$.

267. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}z^n$.

268. a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[n-\frac{(-1)^n}{2^n}\right]z^{n-1}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{z^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}z^n$;

c) $\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+(-2)^n}{z^{n+1}}$.

269. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z+2)^n}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+2)^n}{3^{n+1}}$.

270. La fonction n'est pas développable.

271. $\frac{1}{z-1}+5\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^{n-2}}{(z-1)^n}$. 272. $z+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+2)\cdot 4^{n+1}}{z^{2n+1}}$.

273. $-\frac{1}{12}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{4^n}-\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^{2n-1}}$.

274. $-\frac{i}{2(z-i)}+\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2i)^n}(z-i)^n$. 275. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 4^{n-1}}{(z+2)^{n+3}}$.

276. a) $z = 0$: zéro d'ordre 2; $z_{1,2} = \pm 2i$: zéros simples. b) $z_n = n\pi$ $(n = \pm 1, \pm 2, \ldots)$: zéros simples.

277. a) $z = 0$: zéro d'ordre 3; $z_n = n\pi$ $(n = \pm 1, \pm 2, \ldots)$: zéros simples. b) $z = 0$: zéro simple; $z_n = n\pi i$ $(n = \pm 1, \pm 2, \ldots)$: zéros d'ordre 2.

278. a) $z_n = (2n + 1)\pi i$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$: zéros d'ordre 2. b) b) $z_n = (4n + 1)\frac{\pi}{2} i$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$: zéros d'ordre 2.

279. a) $z = -\pi i$: zéro d'ordre 2; $z_n = n\pi i$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$: zéros simples. b) $z_n = \sqrt[3]{(2n+1)\frac{\pi}{2}}$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$,

$z_n = \sqrt{(2n+1)\frac{\pi}{2}}\,\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$: zéros simples.

280. a) $z_{1,2} = \pm \pi i$: zéros d'ordre 2; $z_n = (2n + 1)\pi i$ $(n = 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$: zéros simples. b) Il n'y a pas de zéros.

281. Zéro d'ordre 2. **282.** Zéro d'ordre 3.

283. Zéro simple. **284.** Zéro d'ordre 4.

285. Zéro d'ordre 1. **286.** Zéro d'ordre 2.

287. Zéro d'ordre 4. **288.** Zéro d'ordre 15.

289. a) C'est un zéro d'ordre non inférieur à min (n, m). b) C'est un zéro d'ordre $n + m$. c) C'est un zéro d'ordre $n - m$ si $n > m$; c'est un point régulier qui n'est pas un zéro si $n = m$; c'est un point singulier si $n < m$.

290. a) Pôle d'ordre 3. b) Pôle d'ordre 4. c) Pôle d'ordre 2.

291. a) Pôle simple. b) Pôle d'ordre 2.

292. a) $z_n = (4n + 1)\frac{\pi}{2}$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$: pôles d'ordre 2. b) $z = 0$: point singulier éliminable.

293. a) $z = -2$: point singulier essentiel. b) $z = 0$: point singulier essentiel.

294. a) $z = 0$: pôle d'ordre 2; $z = -1$: pôle d'ordre 2. b) $z = 0$: pôle d'ordre 2; $z = 2n\pi i$ $(n = \pm 1, \pm 2, \ldots)$: pôles simples.

295. a) $z = 0$: point singulier essentiel. b) $z = -1$: point singulier essentiel. c) $z = 0$: point singulier essentiel.

296. a) $z = 0$: point singulier éliminable; $z = 2\pi k$ $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$: pôles d'ordre 2. b) $z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$: points singuliers éliminables; $z = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$: pôles simples. c) $z = \pi$: pôle simple; $z = k\pi$ $(k = 0, -1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$: pôles d'ordre 2.

297. Point singulier éliminable. **298.** Pôle simple.

299. Pôle simple. **300.** Point singulier éliminable.

301. Point singulier essentiel.

302. $z = 0$: pôle d'ordre 4; $z = -1$: pôle simple.

303. Point singulier éliminable. **304.** Point singulier éliminable.

305. Pôle simple. **306.** Point singulier éliminable.

307. Point singulier essentiel. **308.** 1.

309. $-16/3$. **310.** 1. **311.** -1. **312.** 0. **313.** 0.

314. $\operatorname{Res} f(0) = 0$, $\operatorname{Res} f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{4}{\pi}$, $\operatorname{Res} f\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) = \frac{-8}{\pi^2 (2n+1)(4n+1)}$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

315. $\operatorname{Res}(0) = 1/24$.

316. $\operatorname{Res} f(-i) = \frac{1+3i}{20}\cos 1$, $\operatorname{Res} f(i) = -\frac{1-3i}{20}\cos 1$,

$\operatorname{Res} f(3) = \frac{\operatorname{ch} 3}{10}$.

317. $\operatorname{Res} f\left[(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n\right] = \begin{cases} -\frac{2}{\sqrt{3}} e^{\pi/6+2n\pi}, \\ \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\pi/6+(2n-1)\pi}, \end{cases}$

$\operatorname{Res} f\left[(-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n\right] = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\pi/6+2n\pi}, \\ -\frac{2}{\sqrt{3}} e^{\pi/6+(2n-1)\pi} \end{cases}$

$(n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

318. $\operatorname{Res} f(0) = -\frac{5}{2}$, $\operatorname{Res} f(1) = e$.

319. $\operatorname{Res} f(-1) = \frac{1}{27}$, $\operatorname{Res} f(2) = = -\frac{1}{27}$.

320. $\operatorname{Res} f(0) = 0$, $\operatorname{Res} f(z_1) = -\frac{1+i}{4\sqrt{2}} e^{i}$, $\operatorname{Res} f(z_2) = \frac{(1-i)\, e^{-i}}{4\sqrt{2}}$, $\operatorname{Res} f(z_3) = \frac{(1+i)\, e^{i}}{4\sqrt{2}}$, $\operatorname{Res} f(z_4) = -\frac{(1-i)\, e^{-i}}{4\sqrt{2}}$, où z_k $(k=1, 2, 3, 4)$ sont les racines de l'équation $z^4+1=0$.

321. $\operatorname{Res} f(0) = -\frac{1}{6}$. 322. $\operatorname{Res} f(0) = 0$.

323. $\operatorname{Res} f(-i) = \frac{4}{9} \operatorname{sh} 2 \cdot i$, $\operatorname{Res} f\left(\frac{i}{2}\right) = -\frac{4}{9}(e+2e^{-1})\, i$.

324. $\operatorname{Res} f(0) = -\frac{1}{6}$, $\operatorname{Res} f(3) = \frac{2}{27} \sin^2\left(\frac{3}{2}\right)$. 325. $\operatorname{Res} f(0) = 0$.

326. $\operatorname{Res} f(-3) = \frac{1}{8} e^{-3i}$, $\operatorname{Res} f(-1) = -\frac{e^{-i}}{4}$, $\operatorname{Res} f(1) = \frac{e^{i}}{8}$.

327. $\operatorname{Res} f(0) = -\frac{4}{\pi^2}$, $\operatorname{Res} f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. 328. $\operatorname{Res} f(i) = -1$.

329. $\operatorname{Res} f(1) = \frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots[2n-(n-2)]}{(n-1)!}$.

330. $\operatorname{Res} f(n\pi) = 0$ $(n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

331. $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!\,(2n)!}$ au point $z=0$.

332. e au point $z = 1$. 333. $\sin 1$ au point $z = 0$; $-\sin 1$ au point $z = 1$.

334. $1 - e^{-1}$ au point $z = 0$; e^{-1} au point $z = -1$.

335. $e^{-1} - 1$ au point $z = 0$.

336. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!\,(2n+1)!}$ au point $z=0$.

337. 0. 338. 0. 339. $(1-2e^{-1})\pi i$. 340. $2(1-e^{-1})\pi i$.

341. $-\frac{1}{3}\pi i$. 342. 0. 343. $-\frac{4}{3}\ln 3\cdot\pi i$. 344. $2\pi i$.

345. $[\cos 1+\sin 1+i(\sin 1-\cos 1)]\frac{\pi}{2}$. 346. πi. 347. 0.

348. $2\pi i\frac{e^2}{3}$. 349. $-\pi^2 i$. 350. $2\pi i$. 351. $\frac{\sin 1-4\cos 1}{12}\pi i$.

352. $-\frac{\pi i}{\sqrt{2}}$. 353. 0. 354. $3\pi i$. 355. 0.

356. $z=\infty$: pôle simple. 357. $z=\infty$: point singulier éliminable.
358. $z=\infty$: point singulier essentiel.
359. $z=\infty$: point singulier éliminable.
360. $z=\infty$: point singulier éliminable.
361. $z=\infty$: pôle d'ordre 3. 363. $2\pi i$. 364. 0. 365. 0.

366. $2\pi ei$. 367. $-\frac{\pi}{3}i$. 368. $2\pi i$. 369. $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$. 370. $\frac{\pi}{ab(a+b)}$.

371. $\frac{3}{8}\pi$. 372. $\frac{(2n)!}{(n!)^2}2^{-2n}\pi$. 373. $-\frac{\pi}{27}$.

374. $\frac{\pi}{2(b^2-a^2)^3}\left(\frac{5b^2-a^2}{b^3}+\frac{b^2-5a^2}{a^3}\right)$. 375. $\frac{2}{3}\pi$.

376. $\frac{\pi}{n\sin\frac{2m+1}{n}\pi}$. 377. $\frac{2}{3}\pi$. 378. $\frac{\pi}{2}$. 379. $\frac{\pi}{16a^{3/2}b^{5/2}}$.

381. $\frac{\pi}{3}e^{-3}(\cos 1-3\sin 1)$. 382. $\frac{\pi}{2}e^{-4}(2\cos 2+\sin 2)$.

383. $\frac{\pi}{12}e^{-2}(2e-1)$. 384. $\frac{\pi}{3}e^{-3}$.

385. $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}e^{-a/\sqrt{2}}\left(\cos\frac{a}{\sqrt{2}}+\sin\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$. 386. $\frac{\pi}{2a}e^{-a}$.

387. $\frac{\pi}{2a}e^{-ma}$. 388. $\frac{\pi}{\sqrt{3}}e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\sin\frac{1}{2}$. 389. $\frac{\pi}{16}\left(e^{-\lambda}-\frac{1}{3}e^{-3\lambda}\right)$.

390. $\frac{\pi}{4}(2-a)e^{-a}$. 391. 0. 392. $\frac{\pi}{4b^3}e^{-bm}[3b^2-a^2-mb(3b^2+a^2)]$.

393. $\frac{\pi}{2}$. 394. $\frac{\pi}{2}(1-e^{-1})$. 395. $\frac{b-a}{2}\pi$.

396. $\frac{\pi}{2a^4}-\frac{\pi e^{-ma}}{4a^3}\left(m+\frac{2}{a}\right)$.

397. $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{b^2}{4a}}$. 398. $\pi\left(\frac{1}{\sin a\pi}-\frac{1}{\sin b\pi}\right)$. 399. $\frac{2\pi}{1-p^2}$.

400. $\frac{\pi(1-p+p^2)}{1-p}$. 401. $\frac{2\pi}{p^2(p^2-1)}$. 402. 0. 403. $\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$.

404. πi. **405.** $\frac{2\pi}{b^2}(a-\sqrt{a^2-b^2})$. **406.** $\frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}$. **407.** $\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$.

408. $\frac{1-\pi a \operatorname{cotg} \pi a}{2a^2}$. **409.** $\frac{1}{2a^4}-\frac{\pi}{4a^3}(\operatorname{cotg} \pi a+\operatorname{cotg} \pi a)$.

410. $\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi a}$. **411.** $\frac{\pi^2}{8}$. **412.** $\frac{\pi^2 \operatorname{cotg} \pi a}{\sin \pi a}$. **413.** $\frac{\pi^3}{32}$.

414. $\frac{\pi \operatorname{ch} \alpha a}{2a \operatorname{sh} \pi a}+\frac{1}{2a^2}$. **415.** $\frac{1}{4a^4}\left(\frac{\pi^2 a^2 \operatorname{ch} \pi a}{\operatorname{sh}^2 \pi a}+\frac{\pi a}{\operatorname{sh} \pi a}-2\right)$.

416. $\operatorname*{Res}_{z=k\pi} \frac{f'(z)}{f(z)}=1 \quad (k=\pm 1, \pm 2, \ldots)$.

417. $\operatorname*{Res}_{z=\frac{\pi}{2}+k\pi} \frac{f'(z)}{f(z)}=3 \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

418. a) $\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{f'(z)}{f(z)}=-1$, $\operatorname*{Res}_{z=\frac{\pi}{2}+k\pi} \frac{f'(z)}{f(z)}=1 \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$;

b) $\operatorname*{Res}_{z=k\pi} \frac{f'(z)}{f(z)}=1 \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

419. —2. **420.** 3. **421.** 6. **422.** —1. **423.** —3. **424.** —4. **425.** 2. **426.** 1. **427.** 1. **428.** 1. **429.** 2. **430.** 6. **431.** 3. **432.** Non. **433.** 5. **434.** Non. **435.** 11. **436.** 6. **437.** 2. **438.** 3. **439.** 4. **440.** 1. **441.** n. **442.** 2. **443.** 4. **444.** Non. **445.** 1. **446.** 1.

450. a) Tout le plan. b) Tout le plan, sauf le point $z=2$. c) Tout le plan, sauf le point $z=0$. d) Tout le plan, sauf les points $z_k=1-\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi i$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ e) Tout le plan, sauf le point $z=-2i$.

454. a) et b) C'est une translation. c), d) et f) C'est une rotation. e) C'est une dilatation.

455. a) $w=az+b$; b) $w=-az+b$; c) $w=-i(az+b)$, où a et b sont des nombres réels, $a>0$.

456. a) $w=-\frac{1+8i}{5}z+\frac{14+2i}{5}$. b) $w=2z+i$. c) $w=iz-2$.

457. $w=\frac{z-a}{h}$.

458. INDICATION. En posant $z=x+iy$, $w=u+iv$, on obtient

$$u=\frac{x}{x^2+y^2}, \qquad v=-\frac{y}{x^2+y^2}$$

En parcourant, par exemple, la frontière de la demi-bande de façon que le domaine reste à gauche, on trouve, en vertu du principe de la correspondance des frontières, que la demi-bande aura comme image le IVe quadrant privé du demi-disque $\left|z-\frac{1}{2}\right| \leqslant \frac{1}{2}$.

459. a) $\operatorname{Arg} w=-\frac{\pi}{3}$; b) $|w|=1$, $-\pi<\operatorname{Arg} w<-\frac{\pi}{4}$; c) $\frac{1}{4} \leqslant u \leqslant$

$\leqslant \frac{1}{2}$, $v=0$; d) $\frac{1}{2} < v < 1$, $u=0$; e) $\left|w-\frac{1}{2}\right| > \frac{1}{2}$, $u>0$.

460. $w=\frac{z-i}{iz-i}$. 461. $\left|w-\frac{1}{3}\right| > \frac{1}{3}$, $u<\frac{3}{4}$. 462. $\operatorname{Re} w>0$.

463. $u < v$. 464. $u+v<0$. 465. a) $-1+i$; b) $1+i$; c) ∞.
466. a) $w=-az+b$. b) $w=-i(az+b)$, où a et b sont des nombres réels, $a>0$.

467. $w=\frac{2}{2-z}$. 468. a) $w=\frac{z-i}{z+i}$; b) $w=i\frac{z-2i}{z+2i}$.

469. $w=\frac{z-i}{iz-1}$. 470. $w=\frac{i-1-(1+i)z}{(3i-1)z-1-3i}$.

471. $w=i\frac{1-z}{1+z}$. Utiliser la formule (7).

472. $w=\frac{2z-5}{10-z}$. Utiliser la formule (7).

473. SOLUTION. Utiliser la formule $w=e^{i\varphi}\frac{z-z_0}{1-z\bar{z}_0}$, où z_0 est le point du premier disque qui est transformé en le centre du second disque. Dans le cas a), on a $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$, c'est-à-dire $z_0=\frac{1}{2}$. Compte tenu de la condition $\operatorname{Arg} f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$, on obtient $\varphi=\frac{\pi}{2}$. Donc, $w=i\frac{2z-1}{2-z}$. Dans le cas b), on obtient d'une façon analogue $w=-iz$.

474. $w=\frac{5-z+\sqrt{5}(i-1)(z+1)}{5-z+\sqrt{5}(i+1)(z+1)}$. 475. 1er quadrant du plan dez w.

476. Le domaine $\frac{1}{2} \leqslant |w-1| \leqslant 1$, $-\frac{\pi}{4} \leqslant \operatorname{Arg}(w-1) \leqslant 0$.

477. $w=\sqrt{\frac{1+z}{1-z}}$. 478. $w=\sqrt{e^{2\pi z i}+e^{-2\pi a}}$.

479. $w=\sqrt{\frac{z-b}{z-a}}$. 480. $w=\left(\frac{z-i}{iz-1}\right)^2$.

INDICATION. Appliquer d'abord le disque sur le demi-plan supérieur et transformer ensuite celui-ci en un plan muni d'une coupure.

481. $w=[(z-z_0)e^{-i\varphi_1}]^{\frac{\pi}{\varphi_2-\varphi_1}}$. 482. $w=-e^{-z}$. 483. $w=\left(\frac{e^{-z}-1}{e^{-z}+1}\right)^2$.

484. Sur le rectangle $\{\ln r \leqslant u \leqslant \ln R,\ 0 \leqslant v \leqslant \pi\}$.

485. $w_1=ze^{-i\frac{\pi}{2}}$, $w=\sqrt{w_1}=\sqrt{z}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}$ $(\sqrt{1}=1)$.

486. $w_1=\frac{z-a}{b-z}$, $w=\sqrt{w_1}=\sqrt{\frac{z-a}{b-z}}$.

487. $w_1=z-a$, $w_2=\frac{w_1}{w_1-(b-a)}$, $w=\sqrt{w_2}=\sqrt{\frac{z-a}{z-b}}$.

488. $w_1 = z^2$. Alors $w_1|_{z=1+i} = 2i$. Conformément à la formule (9), $w = e^{i\varphi} \frac{w_1 - 2i}{w_1 + 2i} = e^{i\varphi} \frac{z^2 - 2i}{z^2 + 2i}$. D'après la condition $w(0) = 1$, on trouve $e^{i\varphi} = -1$. Finalement on obtient $w = \frac{2i - z^2}{2i + z^2}$.

489. Le demi-disque supérieur $|w - 1| < 1$, $\operatorname{Im} w > 0$.

490. Le quart $0 < \operatorname{Arg} w < \frac{\pi}{2}$ du disque $|w| < 1$.

491. Le rectangle de sommets 1, 2, $2 + ie$, $1 + ie$.

492. $w_1 = z^4$, $w_2 = \frac{16 + w_1}{16 - w_1}$, $w = w_2^2 = \left(\frac{16 + z^4}{16 - z^4}\right)^2$.

493. $w_1 = z - a$, $w_2 = \frac{\pi i}{b - a} w_1$, $w = e^{w_2} = e^{\frac{\pi i (z - a)}{b - a}}$. 494. $w = \ln z$.

495. $w_1 = e^{-z}$, $w_2 = -w_1$, $w_3 = \frac{w_2 + 1}{1 - w_2}$, $w = w_3^2 = \left(\frac{1 - e^{-z}}{1 + e^{-z}}\right)^2$.

496. $w_1 = 2iz$, $w_2 = w_1 + \frac{\pi}{2}$, $w = \sin w_2 = \sin\left(2iz + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{ch} 2z$.

497. $w = 2 \cdot \frac{z - 2}{z}$. 498. $w = 2i \frac{z + 2}{z}$.

499. $w = \left(\frac{z}{z - 1 + i}\right)^2$. 500. $w = 2\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

501. $w_1 = 2z$, $w_2 = \frac{1}{2}\left(w_1 + \frac{1}{w_1}\right)$, $w = \frac{w_2 - i}{w_2 + i} = \frac{4z^2 - 4iz + 1}{4z^2 + 4iz + 1}$.

502. $w = -\frac{z^8 - i}{z^8 + i}$. 503. $w = e^{i2z}$.

504. a) Le disque unité $|w| < 1$. b) Tout le plan des w muni d'une coupure suivant le segment $u = 0$, $-1 \leqslant v \leqslant 1$.

505. Potentiel des vitesses: $u = x^2 - y^2 + 2x + 2$; fonction de courant: $v = 2(x + 1)y$; lignes de niveau: $x^2 - y^2 + 2x = c_1$ (ce sont des hyperboles); lignes de courant: $xy + y = c_2$ (ce sont des hyperboles); la valeur de la vitesse est donnée par la relation $V = 2\sqrt{(x + 1)^2 + y^2}$; la direction de la vitesse est exprimée de la façon suivante

$$\varphi = -\operatorname{Arctg} \frac{y}{x + 1} + m\pi, \quad m = -1, 0, 1$$

(cf. § 1, formule (1)); projections de la vitesse sur les axes Ox et Oy: $V_{Ox} = 2(x + 1)$, $V_{Oy} = -2y$.

506. Potentiel des vitesses : $u = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$; fonction de courant : $v = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$; lignes de niveau : $x^2 - y^2 = c_1 (x^2 + y^2)^2$; lignes de courant : $xy = c_2 (x^2 + y^2)^2$; la valeur de la vitesse est donnée par l'expression $V = \frac{2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$; la direction de la vitesse est définie par:

$$\varphi = 3 \operatorname{Arctg} \frac{y}{x} + (3m - 1)\pi, \quad m = -1, 0, 1;$$

projections de la vitesse sur les axes Ox et Oy :

$$V_{Ox} = \frac{2x(3y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^3}, \qquad V_{Oy} = \frac{2y(y^2 - 3x^2)}{(x^2 + y^2)^3}.$$

507. Potentiel des vitesses : $u = \frac{1}{2} \ln[(x-1)^2 + y^2]$; fonction de courant : $v = \operatorname{Arctg} \frac{y}{x-1}$; lignes de niveau : $(x-1)^2 + y^2 = c_1$ (ce sont des circonférences) ; lignes de courant : $y = c_2(x-1)$ (ce sont des droites) ; la valeur de la vitesse est donnée par l'expression $V = \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}}$; la direction de la vitesse est exprimée comme suit :

$$\varphi = \operatorname{Arctg} \frac{y}{x-1} + m\pi, \quad m = -1, 0, 1;$$

projections de la vitesse sur les axes Ox et Oy :

$$V_{Ox} = \frac{x-1}{(x-1)^2 + y^2}, \qquad V_{Oy} = \frac{y}{(x-1)^2 + y^2}.$$

508. $f(z) = (1 - i)z^2 + z$. **509.** $f(z) = \sin z + c$.

510. $\Gamma_L = -10\pi$ suivant les deux circonférences.

511. a) Oui. b) Oui. c) Non. d) Oui. e) Oui. f) Non. g) Non. h) Oui. i) Non. j) Oui. k) Oui. l) Oui.

512. $\frac{1}{p^2}$. **513.** $\frac{3}{p^2+9}$. **514.** $\frac{1}{(p-1)^2}$. **515.** $\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$.

516. Non. **517.** $\frac{p+1}{p^2}$. **518.** $\frac{2-p}{p^2+1}$. **519.** $\frac{p^2+2p+2}{2p^2(p+1)}$.

520. $\frac{1}{p-a}$. **521.** $\frac{4}{p^2+16}$. **522.** a) $\frac{p}{p^2+\omega^2}$; b) $\frac{3}{p^2-9}$.

523. $aF(pa)$. **524.** $\frac{2}{p(p^2+4)}$. **525.** $\frac{m(p^2+m^2-n^2)}{(p^2+m^2+n^2)^2-4m^2n^2}$.

526. $\frac{p^3+7p}{(p^2+9)(p^2+1)}$. **527.** $\frac{2mnp}{(p^2+m^2-n^2)^2-4m^2n^2}$.

528. $\frac{1}{8}\left(\frac{3}{p} + \frac{p}{p^2+16} - \frac{4p}{p^2+1}\right)$. **529.** $\frac{p(p^2+m^2+n^2)}{(p^2+m^2+n^2)^2-4m^2n^2}$.

530. $\frac{p^2+2}{p(p^2+4)}$. **531.** $\frac{6}{(p^2+1)(p^2+9)}$. **532.** $\frac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}$.

533. $\frac{p^4+16p^2+24}{p(p^2+4)(p^2+16)}$. **534.** $\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$. **535.** $\frac{1}{(p-1)^2}$.

536. $\frac{2p^3-6p}{(p^2+1)^3}$. **537.** $\frac{2(p^2+p+1)}{(p^2-1)^2}$. **538.** $\frac{2p^2+4p+8}{(p^2+4)^2}$.

539. $\frac{6p}{(p^2-1)^2}$. **540.** $\frac{1}{p(p^2+1)}$. **541.** $\frac{p^3+p^2+p\omega^2-\omega^2}{p(p^2+\omega^2)^2}$.

542. $\frac{4}{(p^2-4)^2}$. 543. $\frac{p^2+2\omega^2}{p^2(p^2+4\omega^2)}$. 544. $\frac{1}{p^2-\omega^2}$. 545. $\frac{2}{p(p+1)^3}$.

546. a) $\ln\frac{p}{p-1}$; b) $\ln\frac{p+1}{p}$; c) $\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{p^2+4}}{p}$.

547. a) $\ln\frac{\sqrt{p^2+1}}{p}$; b) $\frac{1}{2}\ln\frac{p^2+4}{p^2+1}$. 548. a) $\ln\frac{p}{p-1}-\frac{1}{p}$; b) $\ln\frac{p+1}{p-1}$.

549. $\ln\frac{b}{a}$. 550. $\operatorname{Arctg}\frac{a}{\alpha}$. 551. $\operatorname{Arctg}\frac{\beta}{m}-\operatorname{Arctg}\frac{\alpha}{m}$.

552. $A\ln\frac{\delta}{\alpha}+B\ln\frac{\delta}{\beta}+C\ln\frac{\delta}{\gamma}$. 553. $\ln\frac{b}{a}$.

554. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{a+b}{a-b}\right|$.

555. a) $\frac{1}{(p-2)^2+1}$; b) $\frac{p-m}{(p-m)^2+n^2}$. 556. $\frac{3!}{(p+1)^4}$.

557. $\frac{1}{(p-1)^2-1}$. 558. $\frac{p^2-2p}{(p^2-2p+2)^2}$. 559. $\frac{1}{2(p-3)}-\frac{1}{2}\times\frac{p-3}{(p-3)^2+4}$.

560. $\frac{1}{2(p+\alpha)}+\frac{p+\alpha}{2[(p+\alpha)^2+4\beta^2]}$. 561. $\frac{e^{-bp}}{p^2+1}$.

562. $\frac{e^{-bp}}{2p}+\frac{pe^{-bp}}{2(p^2+4)}$.

563. $\frac{e^{-2p}}{p-1}$. 564. $\frac{1-e^{-p}}{p}$. 565. $\frac{1-2e^{-p}+e^{-2p}}{p}$.

566. $\frac{1-2e^{-p}+e^{-2p}}{p^2}$.

567. $\frac{e^{-ap}}{p+b}$. 568. $\frac{be^{-ap}}{p(p+b)}$. 569. $\frac{1-e^{-ap}}{p^2}$. 570. $\frac{e^{-ap}-e^{-bp}}{p^2}$.

571. $\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k+1)}{e^{kp}}$. 572. $F(p)=\frac{1}{ap^2}(2e^{-2ap}-1)+\frac{2}{p}e^{-ap}$.

573. $F(p)=\frac{e^{-ap}}{p}(2-e^{-ap}-e^{-2ap})$.

574. $F(p)=-\frac{1}{p}+\frac{1}{ap^2}+\frac{ap-2}{ap^2}e^{-ap}+\frac{1}{ap^2}e^{-2ap}$.

575. $F(p)=\frac{1}{p}-\frac{1-2ap}{ap^2}e^{-ap}-\frac{1}{ap^2}e^{-2ap}$.

576. $F(p)=\frac{1}{p}-\frac{1}{ap^2}e^{-ap}+\frac{2}{ap^2}e^{-3ap}$.

577. $F(p) = -\frac{b}{p} e^{-ap} + \frac{2b}{p} e^{-2ap}$. 579. $F(p) = \frac{(1-e^{-p})^2}{p^2(1-e^{-4p})}$.

580. $\frac{1+p-e^{-p}}{p^2(e^p-1)}$. 581. $\frac{1}{p^2+1} \cdot \frac{1+e^{-\pi p}}{1-e^{-\pi p}}$.

582. $\frac{1}{p^2+1}\left(p + \frac{2e^{-\frac{\pi}{2}p}}{1-e^{-\pi p}}\right)$.

583. $\frac{1}{(p^2+1)(1-e^{-\pi p})}$. 587. a) $\frac{2e^{-\frac{\pi}{8}p}}{p^2+4}$; b) $\frac{pe^{-\frac{\pi}{18}p}}{p^2+9}$; c) $\frac{3e^{-2p}}{p^2-9}$.

588. $\sum_{k=0}^{n} m_k e^{-kp}$. 589. $\frac{1}{(p-1)(p^2+1)}$. 590. $\frac{p}{(p-2)(p^2+1)}$.

591. $\frac{2}{p^2(p^2-1)}$. 592. $\frac{n!\,F(p)}{p^{n+1}}$. 593. $\frac{2}{p^3(p+2)}$.

595. SOLUTION. On sait que $J_1(t) = -J_0'(t)$. En utilisant les résultats obtenus pour le problème précédent et le théorème de dérivation de l'original, on trouve

$$J_1(t) \risingdotseq -p\frac{1}{\sqrt{p^2+1}} + J_0(0) = -\frac{p}{\sqrt{p^2+1}} + 1 = \frac{\sqrt{p^2+1}-p}{\sqrt{p^2+1}}.$$

596. SOLUTION. Pour $n = 0$ et $n = 1$, la formule

$$J_n(t) \risingdotseq \frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^n}{\sqrt{p^2+1}}$$

est valable. Appliquons la méthode d'induction mathématique. Etant donné que

$$2J_n'(t) = J_{n-1}(t) - J_{n+1}(t) \quad \text{et} \quad J_{n-1}(0) = 0 \quad (n \geqslant 2),$$

alors

$$J_n(t) = J_{n-2}(t) - 2J_{n-1}'(t) \risingdotseq \frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^{n-2}}{\sqrt{p^2+1}} - \frac{2p(\sqrt{p^2+1}-p)^{n-1}}{\sqrt{p^2+1}} =$$

$$= \frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^n}{\sqrt{p^2+1}}.$$

597. SOLUTION. Considérons la fonction

$$F(p) = \frac{1}{p^{n+1}} e^{-\frac{1}{p}} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

On a

$$F(p) = \frac{1}{p^{n+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,p^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,p^{n+k+1}}.$$

Par conséquent, $f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{n+k}}{k!\,(n+k)!}$. Etant donnée que

$$J_n(2\sqrt{t})=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{\frac{n}{2}+k}}{k!\,(n+k)!},$$

on obtient $f(t)=t^{n/2}J_n(2\sqrt{t})$.

En particulier, pour $n=0$, on a $J_0(2\sqrt{t}) \risingdotseq \frac{1}{p}e^{-1/p}$.

599. Posons $\varphi(t)=t^n e^{-t}$. D'après le théorème de translation,

$$t^n e^{-t} \risingdotseq \frac{n!}{(p+1)^{n+1}}.$$

Il est aisé de vérifier que $\varphi(0)=\varphi'(0)=\ldots=\varphi^{(n-1)}(0)=0$. D'après le théorème de dérivation de l'original,

$$\frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t}) \risingdotseq \frac{p^n\cdot n!}{(p+1)^{n+1}}.$$

En utilisant le théorème de translation, on trouve

$$L_n(t)=\frac{e^t}{n!}\frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t}) \risingdotseq \frac{(p-1)^n\cdot n!}{n!\,p^{n+1}}=\frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)^n \quad (n=0, 1, 2, \ldots).$$

600. $-\frac{\ln p}{p}-\frac{C}{p}$, où $C=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right)$ est la constante d'Euler (cf. [15]).

601. SOLUTION. Considérons la fonction $f(t)=e^t \operatorname{erf}(\sqrt{t})$ et supposons que $F(p)$ est l'image de $f(t)$. On a $(\operatorname{erf} t)'=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-t^2}$,

$$f'(t)=e^t \operatorname{erf}(\sqrt{t})+\frac{1}{\sqrt{\pi t}}=f(t)+\frac{1}{\sqrt{\pi t}}. \quad (1)$$

En passant aux images et ayant en vue que $f(0)=0$, on tire de (1) $pF(p)=$ $=F(p)+\frac{1}{\sqrt{p}}$, d'où $F(p)=\frac{1}{(p-1)\sqrt{p}}$. Ici nous avons utilisé le résultat obtenu pour le problème n° 515 et le fait que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$. Donc

$$e^t \operatorname{erf}(\sqrt{t}) \risingdotseq \frac{1}{(p-1)\sqrt{p}}.$$

En appliquant le théorème de translation, on trouve finalement

$$\operatorname{erf}(\sqrt{t}) \risingdotseq \frac{1}{p\sqrt{p+1}}.$$

607. a) $\frac{\pi}{2}e^{-t}$; b) $\frac{\pi}{2}\eta(t-1)$. 608. $f(0)=0$, $f'(0)=1$, $f''(0)=0$.

609. $(t-1)^2\eta(t-1)$. 610. $(t-2)\eta(t-2)$. 611. $e^{t-2}\eta(t-2)$.

612. $e^{-3(t-3)}\eta(t-3)$. 613. $e^{-2t}\sin t$. 614. $\frac{1}{2}(e^{-t}-e^{-3t})$.

615. $(1-t)e^{-t}$.

616. $\frac{1}{2}t\sin t$. 617. $1-e^{-t}-te^{-t}$. 618. $\frac{2\sqrt{3}}{9}e^{\frac{t}{2}}\sin\frac{3\sqrt{3}}{2}t$.

619. $\frac{t^2}{2}+2e^{-t}\sin t$. 620. $t-\sin t$.

621. $\frac{1}{6}e^{2t}-\frac{1}{15}e^{-t}-\frac{1}{10}\cos 2t-\frac{1}{5}\sin 2t$.

622. $1-ne^{-t}+\frac{1}{2}n(n-1)e^{-2t}-\ldots+(-1)^n e^{-nt}$.

623. $\frac{2}{3}e^{-t/2}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t-t\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right]$. 624. $e^{-t}(1-t^2)$.

625. $\frac{1}{3}e^{t/2}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)-\frac{1}{3}e^{-t}$.

626. $\frac{3}{5}+\frac{e^{-2t}}{5}(4\sin t-3\cos t)$. 627. $\frac{1}{9}(e^{-2t}-e^{t}+3te^{t})$.

628. $2e^{t}+e^{t/2}\left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t-\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$.

629. $\frac{1}{3}te^{t}-\frac{1}{3}te^{-t/2}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$.

630. $\frac{1}{2}e^{t-1}\sin 2(t-1)\,\eta(t-1)+\cos 3(t-2)\,\eta(t-2)$.

631. $(t-3)e^{-(t-3)}\eta(t-3)$. 632. $e^{t-1}\eta(t-1)-\eta(t-1)$.

633. $\sin(t-2)\,\eta(t-2)+2\sin(t-3)\,\eta(t-3)+3\sin(t-4)\,\eta(t-4)$.

634. $\operatorname{sh}(t-1)\,\eta(t-1)+\operatorname{ch}2(t-2)\,\eta(t-2)$.

635. $\frac{1}{4}\eta\left(t-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{5}e^{-\left(t-\frac{1}{2}\right)}\eta\left(t-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{20}\cos 2\left(t-\frac{1}{2}\right)\eta\,\times$

$\times\left(t-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{10}\sin 2\left(t-\frac{1}{2}\right)\eta\left(t-\frac{1}{2}\right)$.

636. $(t-1)\,\eta(t-1)+(t-2)^2\eta(t-2)+(t-3)^3\eta(t-3)$.

637. $\eta\left(t-\frac{1}{3}\right)-\cos\left(t-\frac{1}{3}\right)\eta\left(t-\frac{1}{3}\right)$. 638. $1-\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)$.

639. SOLUTION. $\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{p\sqrt{p}}=\frac{1}{\sqrt{p}}\,\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{(\sqrt{p})^2}$.

On pose $\Phi(p)=\frac{1}{\sqrt{p}}$, $F(\sqrt{p})=\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{(\sqrt{p})^2}$, d'où $F(p)=\frac{e^{-ap}}{p^2}$ et d'après

le théorème de retardement,

$$F(p) \doteqdot (t-a)\,\eta\,(t-a) = f(t).$$

D'après le théorème d'Efros,

$$\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{p\sqrt{p}} \doteqdot \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty (\tau - a)\,\eta\,(t-a)\,e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\,d\tau = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty (\tau - a)\,e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_a^\infty \tau e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\,d\tau - \frac{a}{\sqrt{\pi t}} \int_a^\infty e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\,d\tau = I_1(t) + I_2(t).$$

Ici

$$I_1(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_a^\infty \tau e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\,d\tau = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} (-2t)\,e^{-\frac{\tau^2}{4t}} \Big|_{\tau=a}^{\infty} = 2\sqrt{\frac{t}{\pi}}\,e^{-\frac{a^2}{4t}},$$

$$I_2(t) = -\frac{a}{\sqrt{\pi t}} \int_a^\infty e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\,d\tau = \frac{a}{\sqrt{\pi t}} \int_0^a e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\,d\tau - \frac{a}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\,d\tau =$$

$$= a\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{a}{2\sqrt{t}}} e^{-s^2}\,ds - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-s^2}\,ds\right), \quad \text{où} \quad s = \frac{\tau}{2\sqrt{t}}.$$

Par conséquent, $I_2(t) = a\left[\operatorname{erf}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right) - 1\right] = -a \operatorname{Erf}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)$, et finalement on a

$$\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{p\sqrt{p}} \doteqdot 2\sqrt{\frac{t}{\pi}}\,e^{-\frac{a^2}{4t}} - a \operatorname{Erf}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right).$$

640. $\left(t + \frac{\alpha^2}{2}\right) \operatorname{Erf}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right) - \alpha\sqrt{\frac{t}{\pi}}\,e^{-\frac{\alpha^2}{4t}}.$

641. $ae^{hx + a^2h^2t} \operatorname{Erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} + ah\sqrt{t}\right).$

642. SOLUTION. $\dfrac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{p\,(a+\sqrt{p})} = \dfrac{1}{\sqrt{p}}\,\dfrac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{\sqrt{p}\,(a+\sqrt{p})}.$

On suppose que

$$\Phi(p) = \frac{1}{\sqrt{p}}, \quad F(\sqrt{p}) = \frac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{\sqrt{p}\,(a+\sqrt{p})}.$$

D'où

$$F(p) = \frac{e^{-\alpha p}}{p\,(a+p)} = \frac{1}{a}\left(\frac{e^{-\alpha p}}{p} - \frac{e^{-\alpha p}}{p+a}\right) \doteqdot$$

$$\doteqdot \frac{1}{a}\,[\eta\,(t-\alpha) - e^{-a(t-\alpha)}\,\eta\,(t-\alpha)] = f(t).$$

D'après le théorème d'Efros, on a

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{p(a+\sqrt{p})} \risingdotseq \frac{1}{a\sqrt{\pi t}}\int_{\alpha}^{\infty}[1-e^{-a(\tau-\alpha)}]\,e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{a}\,\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}}^{\infty}e^{-s^2}\,ds-\frac{1}{a\sqrt{\pi t}}\int_{\alpha}^{\infty}e^{-\left[a\tau-\alpha a+\frac{\tau^2}{4t}\right]}\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{a}\,\mathrm{Erf}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right)-\frac{1}{a\sqrt{\pi t}}\int_{\alpha}^{\infty}e^{a\alpha+a^2t}\,e^{-\left(\frac{\tau}{2\sqrt{t}}+a\sqrt{t}\right)^2}\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{a}\,\mathrm{Erf}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right)-\frac{e^{a(at+\alpha)}}{a}\,\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}+a\sqrt{t}}^{\infty}e^{-z^2}\,dz,$$

où $z=\frac{\tau}{2\sqrt{t}}+a\sqrt{t}$.

Donc,

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{p(a+\sqrt{p})} \risingdotseq \frac{1}{a}\,\mathrm{Erf}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right)-\frac{e^{a(at+\alpha)}}{a}\,\mathrm{Erf}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}a+a\sqrt{t}\right).$$

643. SOLUTION. $I(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_{0}^{\infty}\operatorname{ch}\tau\, e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\,d\tau$. En comparant $I(t)$ avec la formule (19) du § 14, on voit que $f(t)=\operatorname{ch} t$, donc $F(p)=\frac{p}{p^2-1}$. Par conséquent, $F(\sqrt{p})=\frac{\sqrt{p}}{p-1}$. En posant $\Phi(p)=\frac{1}{\sqrt{p}}$, on obtient $\Phi(p)\,F(\sqrt{p})=$ $=\frac{1}{p-1}\risingdotseq I(t)$, d'où $I(t)=e^t$.

644. $I(t)=e^{-t}$. 645. $I(t)=2te^{t}$. 646. $I(t)=2te^{-t}$.

647. $x(t)=(t+1)\,e^{-t}$. 648. $x(t)=-1$.

649. $x(t)=\frac{e^{-2t}-\cos t+2\sin t}{5}$. 650. $x(t)=t+\frac{1}{2}t^2$.

651. $x(t)=t$. 652. $x(t)=\cos t$. 653. $x(t)=\frac{1}{4}e^{t}+\frac{5}{12}e^{-3t}-\frac{2}{3}$.

654. $x(t)=\frac{1}{4}(1-e^{2t}+2te^{2t})$.

655. $x(t)=\frac{1}{8}(3e^{t}-e^{-3t}-2e^{-t})$. 656. $x(t)=t-\sin t$.

657. $x(t)=\frac{2}{25}e^{-2t}-\frac{2}{25}\cos t+\frac{14}{25}\sin t-\frac{1}{5}t\sin t-\frac{2}{5}t\cos t$.

658. $x(t)=\frac{1}{2}(e^{-t}-te^{-t}-\cos t)$.

659. $x(t)=\frac{1}{2}e^{t}-t-1+\frac{1}{2}(\cos t+\sin t)$.

660. $x(t)=\frac{1}{2}t^{2}-1+\cos t-\sin t$. 661. $x(t)=\frac{1}{2}t^{2}e^{t}+te^{t}$.

662. $x(t)=\frac{3}{5}e^{-t}\sin 2t-\frac{4}{5}e^{-t}\cos 2t-\frac{1}{5}$.

663. $x(t)=\frac{1}{2}(1-e^{t}\cos t+e^{t}\sin t)$.

664. $x(t)=2+\frac{1}{2}(e^{-t}-\cos t+\sin t)$.

665. $x(t)=t^{2}-4t+6-5e^{-t}-te^{-t}$.

666. $x(t)=2t+\frac{1}{2}(e^{-t}+\cos t-\sin t)$.

667. $x(t)=\frac{1}{2}t\sin t-\cos t+\sin t$.

668. $x(t)=\frac{1}{6}t^{3}-\frac{1}{2}t^{2}+2t-4+e^{-t}$.

669. $x(t)=\frac{3}{5}+\frac{2}{5}e^{-t}\cos 2t+\frac{1}{5}e^{-t}\sin 2t$.

670. $x(t)=\frac{1}{2}(\cos t+\operatorname{ch} t)-t-1$.

671. $x(t)=\frac{1}{2}(1-e^{-t}\cos t-e^{-t}\sin t)$. 672. $x(t)=1-2\cos t$.

673. $x(t)=\frac{1}{4}t+\cos 2t-\frac{1}{8}\sin 2t$.

674. $x(t)=\frac{3}{25}-\frac{t}{5}-\frac{3}{25}e^{t}\cos 2t+\frac{4}{25}e^{t}\sin 2t$.

675. $x(t)=e^{-t}-e^{t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{1}{\sqrt{3}}e^{t/2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$.

676. $x(t)=-1-\frac{1}{2}(\sin t+\cos t+e^{-t})$.

677. $x(t)=\frac{1}{2}e^{t}+\frac{3}{2}\sin t+\frac{1}{2}\cos t-1$.

678. $x(t)=\operatorname{ch} t-\frac{1}{2}t^{2}-1$. 679. $x(t)=2+\frac{1}{2}(e^{t}+\sin t-\cos t)$.

680. $x(t)=e^{t}\left(1-t+\frac{1}{2}t^{2}\right)-1$.

681. $x(t)=-\frac{3}{2}\sin t-\frac{1}{2}t\cos t$. 682. $x(t)=2e^{-t}+te^{-t}+t-2$.

683. $x(t)=\frac{1}{3}e^{-t}-\frac{1}{3}e^{t/2}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t-3\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$.

684. $x(t) = -\frac{1}{4}e^t - \frac{3}{4}e^{-t} - \frac{1}{2}\sin t.$

685. $x(t) = \frac{1}{2}e^t - \frac{5}{6}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{1}{\sqrt{3}}e^{t/2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t.$

686. $x(t) = \cos t - t\cos t.$

687. $x(t) = 2 + t - \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}te^t - \frac{3}{2}e^t.$

688. $x(t) = 1 - \frac{22}{25}e^{-t} - \frac{6}{5}te^{-t} - \frac{3}{25}\cos 2t + \frac{4}{25}\sin 2t.$

689. $x(t) = \frac{t}{4}\sin 2t + \frac{1}{12}(\cos 2t - \cos 4t).$

690. $x(t) = \frac{1}{2}(t-1)e^t + \frac{1}{2}\cos t + 2\sin t - 2t\cos t.$

691. $x(t) = e^t\left(\frac{t^2}{2} - t + 1\right).$

692. $x(t) = 2t - 3 + 3e^{-t} - \frac{1}{5}(\sin 2t - 2\cos 2t + 2e^{-t}).$

693. $x(t) = 4t + 3 - 2e^t.$ 694. $x(t) = e^{2t} - e^t - te^t.$

695. $x(t) = 3e^t - 3 - 2t - t^2 - \frac{t^3}{3}.$

696. $x(t) = \frac{1}{4}e^t\left(t^2 - 3t + \frac{3}{2}\right) +$

$+\frac{1}{3}e^{\frac{t}{2}}\left(\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t - \cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \frac{1}{24}e^{-t}.$

697. $x(t) = \frac{4}{9}\sin 2t - \frac{5}{9}\sin t - \frac{1}{3}t\cos 2t.$

698. $x(t) = \frac{a}{2n^2}[\sin nt\cos\alpha - nt\cos(nt + \alpha)].$

699. $x(t) = \frac{1}{6}t^2 - \frac{4}{9}t + \frac{35}{54} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{4}{27}e^{-3t}.$

700. $x(t) = -\frac{t}{24}[3t\cos t + (t^2 - 3)\sin t].$

701. $x(t) = \frac{1}{\beta}e^{\alpha t}\sin\beta t.$ 702. $x(t) = \frac{1}{3}\sin t - \frac{1}{6}\sin 2t.$

703. $x(t) = \frac{1}{10}e^{2t} - \frac{1}{2} + \frac{2}{5}\cos t - \frac{1}{5}\sin t.$

704. $x(t) = \frac{\gamma}{2}t^2 + (1-\gamma)t + (\gamma - 1) + \left(\frac{1}{2} - \gamma\right)e^{-t} + \frac{1}{2}(\cos t - \sin t).$

705. $x(t) = \frac{83}{80}\operatorname{ch} 2t - \frac{1}{10}\cos t + \frac{1}{16}\cos 2t.$

706. $x(t)=e^{t}\left(\cos t+\sin t-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}e^{-3t}.$

707. $x(t)=\frac{1}{3}e^{-t/2}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)+\frac{1}{3}(t-1)e^{t}.$

708. $x(t)=\frac{1}{4}(t^2\sin t+t\cos t-\sin t).$

709. $x(t)=\frac{2}{9}[e^{t}-e^{-2t}(3t+1)].$ 710. $x(t)=1-e^{-t}\left(\frac{t^2}{2}+t+1\right).$

711. $x(t)=1-\frac{1}{3}e^{-t}-\frac{2}{3}e^{t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t.$

712. $x(t)=\frac{2a}{\omega^2}\left[\sin^2\frac{\omega t}{2}\eta(t)-\sin^2\frac{\omega(t-b)}{2}\eta(t-b)\right].$

713. $x(t)=-\cos t.$ 714. $x(t)=(t-1)^2+e^{1-t}.$ 715. $x(t)=t^2+2t.$

716. $x(t)=\left(t-1-\frac{\pi}{2}\right)\cos t.$ 717. $x(t)=(t^2-2t+2)e^{1-t}.$

718. $x(t)=\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\eta(t)-\left[(t-1)-\frac{1}{2}\sin 2(t-1)\right]\times$
$\times\eta(t-1)+\frac{1}{2}\left[(t-2)-\frac{1}{2}\sin 2(t-2)\right]\eta(t-2).$

719. $x(t)=[b+(1-b)\cos t]\,\eta(t)+[b-b\cos(t-a)]\,\eta(t-a).$

720. $x(t)=\frac{1}{3}\sin 3t\,\eta(t)+\frac{1}{9}\left[(t-1)-\frac{1}{3}\sin 3(t-1)\right]\eta(t-1)-$
$$-\frac{2}{9}\left[(t-2)-\frac{1}{3}\sin 3(t-2)\right]\eta(t-2)+$$
$$+\frac{1}{9}\left[(t-3)-\frac{1}{3}\sin 3(t-3)\right]\eta(t-3).$$

721. $x(t)=\sum_{k=0}^{3}(-1)^k\,[1-e^{t-ka}+e^{t-ka}(t-ka)]\,\eta(t-ka).$

722. SOLUTION. L'équation du mouvement s'écrit $m\ddot{x}=-m\lambda x-2m\mu\dot{x}$; $x(0)=x_0$, $\dot{x}(0)=v_0$. L'équation opératorielle prend la forme
$$p^2X-px_0-v_0+2\mu pX-2\mu x_0+\lambda X=0,$$
d'où $X(p)=\frac{2\mu x_0+v_0+px_0}{p^2+2\mu p+\lambda}$ ou
$$X(p)=\frac{x_0(p+\mu)+\mu x_0+v_0}{(p+\mu)^2+(\sqrt{\lambda-\mu^2})^2}=\frac{x_0(p+\mu)}{(p+\mu)^2+n^2}+\frac{\mu x_0+v_0}{(p+\mu)^2+n^2},$$
où $n^2=\lambda-\mu^2$.
On trouve l'original de $X(p)$ et l'on obtient
$$x(t)=\frac{1}{n}e^{-\mu t}[nx_0\cos nt+(\mu x_0+v_0)\sin nt].$$

723. L'équation du mouvement sera

$$m\ddot{x} = -mn^2x + F\eta(t) - F\eta(t - T), \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

724. L'équation du mouvement sera $\ddot{x} = an^2 - n^2x$, $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$.

725. L'équation du mouvement sera

$$m\ddot{x} = -mg - 2km\dot{x}, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = v_0.$$

726. SOLUTION. L'équation du mouvement s'écrit

$$m\ddot{x} = F. \qquad (1)$$

Dans le cas examiné, $m = 2$, $F = F_0 + at = 4 + at$ et l'équation (1) prend la forme

$$2\ddot{x} = 4 + at, \qquad (2)$$

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 10. \qquad (3)$$

L'équation opératorielle sera $2(p^2X - 10) = \frac{4}{p} + \frac{a}{p^2}$, d'où $X = \frac{1}{p^2} \times \times \left(\frac{a}{2p^2} + \frac{2}{p} + 10\right)$.

On trouve l'original de $X(p)$ et l'on obtient

$$x(t) = \frac{a}{12}t^3 + t^2 + 10t.$$

Pour trouver la valeur de a, on utilise le système suivant :

$$\begin{cases} 450 = \frac{at_0^3}{12} + t_0^2 + 10t_0, \\ 105 = \frac{at_0^2}{4} + 2t_0 + 10, \end{cases}$$

d'où l'on tire $t_0 = 10$, $a = 3$.

727. L'équation du mouvement sera

$$m\ddot{x} = 4mx - 3m\dot{x}.$$

$$x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad x(t) = \frac{1}{5}(4e^t + e^{-4t}).$$

728. L'équation du mouvement s'écrit $m\ddot{x} = mg - \lambda\dot{x}$.

Conformément aux conditions du problème, $\lambda = \frac{1}{3}mg$ pour $v = 1$ m/s et l'on obtient finalement l'équation

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{1}{3}gv, \quad v(0) = 0,$$

d'où

$$v(t) = 3\left(1 - e^{-\frac{gt}{3}}\right), \quad v_{\max} = 3 \quad \text{pour} \quad t = \infty.$$

729. L'équation du mouvement sera

$$m\ddot{x} = -k\dot{x}, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = v_0,$$

$$x(t)=\frac{mv_0}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right),\qquad x_{\max}=\frac{mv_0}{k}\quad \text{pour}\quad t=\infty.$$

730. SOLUTION. Formons l'équation du mouvement de l'extrémité inférieure de la chaînette. Soit O (cf. figure ci-contre) l'origine des coordonnées et dirigeons l'axe Ox vers le bas. Dans ce cas, les conditions initiales seront: $x(0) = l$, $\dot{x}(0) = 0$ (la chaînette reste immobile). Si l'on désigne par x l'extrémité inférieure, la force motrice sera égale au poids de la partie de la chaînette qui pend de la table, c'est-à-dire

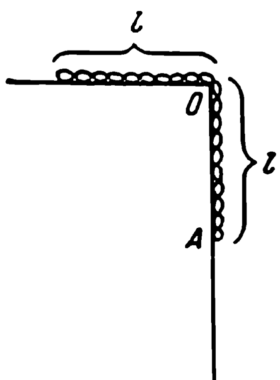


Fig. concernant n° 730.

$$F=\frac{mg}{2l}x.$$

Ainsi, l'équation différentielle du mouvement s'écrira

$$m\ddot{x}=\frac{mg}{2l}x,\quad x(0)=l,\quad \dot{x}(0)=0,$$

$$x(t)=\frac{l}{2}\left(e^{t\sqrt{\frac{g}{2l}}}+e^{-t\sqrt{\frac{g}{2l}}}\right).$$

En vertu de cette loi, le déplacement se poursuivra jusqu'au moment T où la chaînette quittera la table. Ce moment sera trouvé en posant $x = 2l$:

$$4=e^{T\sqrt{\frac{g}{2l}}}+e^{-T\sqrt{\frac{g}{2l}}}.$$

En désignant $z=e^{T\sqrt{\frac{g}{l2}}}$, on obtient

$$z^2-4z+1=0,$$

d'où $z_1=2-\sqrt{3}<1$, $z_2=2+\sqrt{3}$. On écarte z_1, car son utilisation aboutirait à l'obtention d'une valeur négative de T. De cette façon, pour déterminer T, on a l'équation

$$e^{T\sqrt{\frac{g}{2l}}}=2+\sqrt{3},\quad \text{d'où}\quad T=\sqrt{\frac{2l}{g}}\ln(2+\sqrt{3}).$$

731. L'équation du mouvement sera

$$m\ddot{x}=-2mxk^2,\quad x(0)=a,\quad \dot{x}(0)=0,\quad x(t)=a\cos\left(\sqrt{2}\,kt\right).$$

732. L'équation du mouvement sera

$$m\ddot{x}=-\mu mx,\quad x(0)=a,\quad \dot{x}(0)=0,\quad t=\frac{\pi}{2\sqrt{\mu}}.$$

733. L'équation du mouvement sera

$$m\ddot{x}=-k\dot{x},\quad x(0)=0,\quad \dot{x}(0)=6,\quad x(t)=600\,(1-e^{-0,01t}).$$

734. L'équation du mouvement sera

$$\ddot{x}+4x=2\cos t,\quad x(0)=0,\quad \dot{x}(0)=0,\quad x(t)=\frac{2}{3}(\cos t-\cos 2t).$$

735. L'équation du mouvement sera $m\ddot{r}=-mk^2r$ ou

$$\ddot{x} = -k^2 x, \quad x(0) = a, \quad \dot{x}(0) = 0;$$
$$\ddot{y} = -k^2 y, \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = v_0.$$

Le point décrit une ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\frac{v_0^2}{k^2}} = 1$.

736. L'équation du mouvement sera

$$\ddot{x} = k^2 x, \quad x(0) = a, \quad \dot{x}(0) = 0;$$
$$\ddot{y} = k^2 y, \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = v_0.$$

Le point décrit une hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\frac{v_0^2}{k^2}} = 1$.

737. Eq. dif. $L\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{C}Q = E\cos(\omega t + \alpha)$, $Q|_{t=0} = 0$, $\left.\frac{dQ}{dt}\right|_{t=0} = 0$.

738. Eq. dif. $L\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{C}Q = E\sin nt$, $Q|_{t=0} = 0$, $\left.\frac{dQ}{dt}\right|_{t=0} = 0$.

739. Eq. dif. $L\frac{dI}{dt} + RI = E\sin(\omega t + \alpha)$, $I|_{t=0} = 0$.

740. Eq. dif. $L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E_1\eta(t) + (E_2 - E_1)\eta(t - T)$.

$Q|_{t=0} = 0$, $\left.\frac{dQ}{dt}\right|_{t=0} = 0$.

741. Eq. dif. $L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E$, $Q|_{t=0} = 0$, $\left.\frac{dQ}{dt}\right|_{t=0} = 0$.

742. $x(t) = (C_1 + C_2t^2)e^{-t}$. **743.** $x(t) = C_1$. **744.** $x(t) = e^{-t}$.

745. $x(t) \equiv -1$. **746.** $x(t) = e^t$.

747. a) $x(t) = \sum_{s=0}^{k} (-1)^s 2^s s!\, C_k^s \frac{t^{2s}}{(2s)!}$; b) $x(t) = \sum_{s=0}^{k} (-1)^s 2^s s!\, C_k^s \frac{t^{2s+1}}{(2s+1)!}$.

748. $x(t) = \frac{1}{2}(e^t - 1) - \ln\frac{1+e^t}{2}$. **749.** $x(t) = e^{-t}[(t+1)\ln(t+1) - t]$.

750. $x(t) = (e^t + 2)\ln\frac{e^t+2}{3} - e^t + 1$.

751. $x(t) = e^t - 1 - (t + \ln 2)(e^t + 1) + (e^t + 1)\ln(e^t + 1)$.

752. $x(t) = \sin t\left(t - \frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{t}{2}}{\sqrt{3}}\right) + \cos t\ln(2 + \cos t) - \ln 3\cos t$.

753. $x(t) = \frac{1}{3} - \frac{9 - \pi\sqrt{3}}{27}\cos t + \frac{\sqrt{3}}{36}\sin t\ln\left|\frac{\sqrt{3}\sin t - 2}{\sqrt{3}\sin t + 2}\right| -$

$-\frac{\sqrt{3}}{9}\cos t\operatorname{Arctg}(\sqrt{3}\cos t)$.

754. $x(t)=\cos t \operatorname{Arctg}(\cos t)-\frac{\pi}{4}\cos t-\frac{1}{2\sqrt{2}}\sin t\cdot\ln\left|\frac{\sin t-\sqrt{2}}{\sin t+\sqrt{2}}\right|.$

755. $x(t)=\sin t \operatorname{Arctg}(\sin t)+\cos t\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\left\{\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\cos t}{\sqrt{2}-\cos t}\right|-\right.$

$\left.-\ln(3+2\sqrt{2})\right\}.$

756. $x(t)=-\operatorname{sh} t+2\operatorname{ch} t\left(\operatorname{Arctg} e^t-\frac{\pi}{4}\right).$

757. $x(t)=\ln 2\cos t-\cos t\ln(2+\sin t)-t\sin t+\frac{2}{\sqrt{3}}(2\sin t+1)\times$

$\times\left(\operatorname{Arctg}\frac{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}+1}{\sqrt{3}}-\frac{\pi}{6}\right).$

758. $x(t)=e^t,\quad y(t)=-e^t.$ 759. $x(t)=e^t,\quad y(t)=e^t.$

760. $x(t)=2(1-e^{-t}-te^{-t}),\quad y(t)=2-t-2e^{-t}-2te^{-t}.$

761. $x(t)=\frac{1}{4}(e^t-e^{3t}+2te^{3t}),\quad y(t)=\frac{1}{4}(5e^t-e^{3t}-2te^{3t}).$

762. $x(t)=e^t(\cos t-2\sin t),\quad y(t)=e^t(\cos t+3\sin t).$

763. $x(t)=\frac{1}{3}(e^t+2\cos 2t+\sin 2t),\quad y(t)=\frac{2}{3}\left(e^t-\cos 2t-\frac{1}{2}\sin 2t\right).$

764. $x(t)=e^t-\frac{11}{34}e^{3t}-\frac{3}{17}\cos t+\frac{5}{17}\sin t-\frac{1}{2},$

$y(t)=-\frac{2}{3}e^t+\frac{22}{51}e^{3t}+\frac{4}{17}\cos t-\frac{1}{17}\sin t.$

765. $x(t)=-\frac{1}{15}e^{-2t}+\frac{13}{12}e^{-t}-2+\frac{1}{6}e^t+\frac{2}{3}e^{2t}+\frac{3}{20}e^{3t},$

$y(t)=\frac{1}{15}e^{-2t}+\frac{13}{12}e^{-t}-2-\frac{1}{6}e^t+\frac{2}{3}e^{2t}+\frac{7}{20}e^{3t},$

$z(t)=-\frac{13}{12}e^{-t}-\frac{1}{2}e^t+\frac{4}{3}e^{2t}+\frac{1}{4}e^{3t}.$

766. $x(t)=-e^t,\quad y(t)=0,\quad z(t)=e^t.$

767. $x(t)=\frac{2}{5}(e^{3t}-e^{-2t}),\quad y(t)=\frac{1}{5}(3e^{3t}+2e^{-2t}),\quad z(t)=\frac{1}{5}(3e^{3t}+2e^{-2t}).$

768. $x(t)=\frac{3e^{-2t}}{4(2+a)}+\frac{(11-4a)e^{2t}}{4(2-a)}+\frac{3e^{at}}{a^2-4}.$

$y(t)=-\frac{e^{-2t}}{4(2+a)}+\frac{(11-4a)e^{2t}}{4(2-a)}+\frac{(a+1)e^{at}}{a^2-4}.$

769. $x(t)=2-e^{-t},\quad y(t)=2-e^{-t},\quad z(t)=2e^{-t}-2.$

770. $x(t)=6e^t-e^{2t}-4e^{3t},\quad y(t)=3e^t-2e^{3t},\quad z(t)=6e^{3t}+e^{2t}-6e^t.$

771. $x(t)=-\frac{1}{15t^2}+\frac{13}{12t}-2+\frac{1}{6}t+\frac{2}{3}t^2+\frac{3}{20}t^3,$

$y(t)=\frac{1}{15t^2}+\frac{13}{12t}-2-\frac{1}{6}t+\frac{2}{3}t^2+\frac{7}{20}t^3,$

$z(t)=-\frac{13}{12t}-\frac{1}{2}t+\frac{4}{3}t^2+\frac{1}{4}t^3.$

772. $x_m(t)=e^{-ct}\frac{(ct)^m}{m!}\quad (m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$

773. $x(t)=\frac{1}{2}-\frac{1}{5}e^{-t}-\frac{3}{10}e^{-6t/11},\quad y(t)=\frac{1}{5}(e^{-t}-e^{-6t/11}).$

774. $x(t)=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}t,\quad y(t)=\frac{5}{4}t^2-\frac{1}{4},\quad z(t)=\frac{5}{4}t^2-\frac{2}{3}t+\frac{5}{12}.$

775. $x(t)=\frac{28}{9}e^{3t}-e^{-t}-\frac{t}{3}-\frac{1}{9},\quad y(t)=\frac{28}{9}e^{3t}+e^{-t}-\frac{t}{3}-\frac{1}{9}.$

776. Les équations du mouvement de l'électron seront

$$\begin{cases} m\ddot{x}=-\frac{eH}{c}\dot{y}, & x(0)=0, \quad \dot{x}(0)=v_0,\\ m\ddot{y}=\frac{eH}{c}\dot{x}, & y(0)=0, \quad \dot{y}(0)=0,\end{cases}$$

$$x(t)=\frac{v_0mc}{eH}\sin\frac{eHt}{mc},\quad y(t)=\frac{mcv_0}{eH}\left(1-\cos\frac{eHt}{mc}\right).$$

L'électron décrira la trajectoire $x^2+y^2-\frac{2mcv_0}{eH}y=0.$

777. L'équation du mouvement sera

$$\begin{cases} m\ddot{x}=0, & x(0)=0, \quad \dot{x}(0)=\frac{v_0}{\sqrt{2}},\\ m\ddot{y}=-gm, & y(0)=0, \quad \dot{y}(0)=\frac{v_0}{\sqrt{2}}.\end{cases}$$

L'altitude maximale sera $H=\frac{v_0^2}{4g}$; le point d'impact $x=\frac{v_0^2}{g}$.

778. Supposons que l'électron sort de l'origine des coordonnées. Dirigeons l'axe Ox parallèlement à la direction du champ magnétique H et choisissons l'axe Oy de façon que le vecteur v_0 se trouve dans le plan des coordonnées xOy.

Dans ce cas, les équations du mouvement seront

$$\begin{cases} m\ddot{x}=0, & x(0)=0, \quad \dot{x}(0)=v_0\cos\alpha,\\ m\ddot{y}=-\frac{eH}{c}\dot{z}, & y(0)=0, \quad \dot{y}(0)=v_0\sin\alpha,\\ m\ddot{z}=\frac{eH}{c}\dot{y}, & z(0)=0, \quad \dot{z}(0)=0.\end{cases}$$

La trajectoire de l'électron sera

$$\begin{cases} y^2+z^2-\dfrac{2v_0cm\sin\alpha}{eH}z=0, \\ x=tv_0\cos\alpha. \end{cases}$$

779. Les équations du mouvement seront

$$\begin{cases} m\ddot{x}=-km\dot{x}, & x(0)=0, \quad \dot{x}(0)=v_0\cos\alpha, \\ m\ddot{y}=-mg-km\dot{y}, & y(0)=0, \quad \dot{y}(0)=v_0\sin\alpha, \end{cases}$$

$$x(t)=\frac{v_0\cos\alpha}{k}(1-e^{-kt}), \qquad y(t)=\frac{v_0k\sin\alpha+g}{k^2}(1-e^{-kt})-\frac{gt}{k}.$$

780. Les équations du mouvement seront

$$\begin{cases} m\ddot{x}=-\dfrac{eH}{c}\dot{y}-km\dot{x}, & x(0)=0, \quad \dot{x}(0)=u, \\ m\ddot{y}=\dfrac{eH}{c}\dot{x}-km\dot{y}, & y(0)=0, \quad \dot{y}(0)=0, \\ m\ddot{z}=-km\dot{z}, & z(0)=0, \quad \dot{z}(0)=0. \end{cases}$$

781. Les équations du mouvement seront

$$\begin{cases} m\ddot{x}=-2\lambda\dot{x}-\mu^2x, & x(0)=a, \quad \dot{x}(0)=0, \\ m\ddot{y}=-2\lambda\dot{y}-\mu^2y, & y(0)=0, \quad \dot{y}(0)=v_0. \end{cases}$$

782. Les équations du mouvement seront

$$\begin{cases} m\ddot{x}=0, & x(0)=0, \quad \dot{x}(0)=v_0, \\ m\ddot{y}=-mk^2y, & y(0)=a, \quad \dot{y}(0)=0, \end{cases}$$

$$x(t)=v_0t, \qquad y(t)=a\cos kt.$$

La trajectoire du point sera décrite par l'équation $y=a\cos\left(\dfrac{kx}{v_0}\right)$.

783. $\varphi(x)=\frac{1}{2}\operatorname{sh}x+\frac{1}{2}\sin x.$

784. $\varphi(x)=\frac{1}{3}\left(e^x-e^{-x/2}\cos\frac{\sqrt{3}x}{2}+\sqrt{3}e^{-x/2}\sin\frac{\sqrt{3}x}{2}\right).$

785. $\varphi(x)=x+\frac{1}{6}x^3.$ **786.** $\varphi(x)=\frac{2}{5}e^{2x}+\frac{3}{5}\cos x+\frac{1}{5}\sin x.$

787. $\varphi(x)=2+x-e^{\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{\sqrt{3}x}{2}-\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}x}{2}\right).$

788. $\varphi(x)=-\frac{1}{16}-\frac{1}{8}x+\frac{3}{8}x^2+\frac{1}{16}e^{2x}-\frac{1}{12}x^3.$

789. $\varphi(x)=\frac{1}{12}e^{-x}+\frac{1}{6}e^x+\frac{1}{3}e^{-x/2}\left(\cos\frac{\sqrt{3}x}{2}-\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}x}{2}\right).$

790. $\varphi(x)=\frac{1}{3}\left(e^x-e^{-x}+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\sqrt{2}x\right).$ **791.** $\varphi(x)=xe^x.$

792. $\varphi(x)=e^{x}$. 793. $\varphi(x)=\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\cos\sqrt{3}\,x$.

794. $\varphi(x)=\operatorname{ch}x-xe^{-x}$. 795. $\varphi(x)=\frac{1}{2}(\operatorname{ch}x+\cos x)$.

796. $\varphi(x)=x-\frac{1}{6}x^{3}$. 797. $\varphi(x)=\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{sh}\frac{\sqrt{5}}{2}x$. 798. $\varphi(x)=1-x$.

799. $\varphi(x)=J_0(x)$, de façon que $\int\limits_0^x J_0(x-t)\,J_0(t)\,dt=\sin x$.

800. $\varphi(x)\equiv 1$. 801. $\varphi(x)=e^{-x}$. 802. $\varphi(x)=1+2x+\frac{1}{2}x^{2}+\frac{1}{3}x^{3}$.

803. $\varphi(x)=2xe^{x}-x^{2}e^{x}$. 804. $\varphi(x)\equiv 1$. 805. $\varphi(x)=1-\frac{x^{2}}{2}$.

806. $\varphi_1(x)=e^{-x}(1-x)$, $\varphi_2(x)=\frac{8}{9}e^{2x}+\frac{1}{3}xe^{-x}-\frac{8}{9}e^{-x}$.

807. $\varphi_1(x)=e^{2x}$, $\varphi_2(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{2x}$.

808. $\varphi_1(x)=\frac{1}{3}e^{3/2x}\left(\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x+2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)-\frac{1}{3}$,

$\varphi_2(x)=e^{3/2x}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$.

809. $\varphi_1(x)=(x+2)\sin x+(2x+1)\cos x$.

$\varphi_2(x)=\left(1+\frac{x}{2}\right)\cos x-\left(\frac{1}{2}+x\right)\sin x$.

810. $\varphi_1(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\sqrt{3}\,x-\frac{3}{2}\operatorname{sh}x$, $\varphi_2(x)=\cos\sqrt{3}\,x-3\operatorname{ch}x$.

811. $\varphi_1(x)=2(1-x)e^{-x}$, $\varphi_2(x)=(1-x)e^{-x}$.

812. $x(t)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(t-k)^{2k+3}}{(2k+3)!}\eta(t-k)$.

813. $x(t)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{2^{k}(t-k)^{k+3}}{(k+3)!}\eta(t-k)$.

814. $x(t)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(k+1)(t-k)^{k+2}}{(k+2)!}\eta(t-k)$.

815. $x(t)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\frac{(t-2k)^{k+3}(k+1)}{(k+3)!}\eta(t-2k)$.

816. $x(t)=\left(-t+\frac{1}{2}t^2\right)\eta(t)+\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(t-k+2)^{k-1}}{k!}(t-3k+2)\eta(t-k+2).$

817. $x(t)=\left(1+t+\frac{t^2}{2!}\right)\eta(t)+$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(t-k)^{k+1}}{(k+1)!}\eta(t-k)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(t-k)^{k+2}}{(k+2)!}\eta(t-k).$$

818. $x(t)=\cos t.$ 819. $u(x,\ t)=u_0\left(1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{kt}}}e^{-z^2}\,dz\right).$

820. $u(x,\ t)=u_1\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{kt}}}e^{-z^2}\,dz.$

821. $u(x,\ t)=ae^{-x\sqrt{\frac{\omega}{2k}}}\cos\left(\omega t-x\sqrt{\frac{\omega}{2k}}\right)-$

$$-\frac{a}{\pi}\int_0^{\infty}e^{-\rho t}\sin x\sqrt{\frac{\rho}{k}}\frac{\rho\,d\rho}{\rho^2+\omega^2}.$$

822. $u(x,\ t)=a\left[e^{-x\sqrt{\frac{\omega}{2k}}}\sin\left(\omega t-x\sqrt{\frac{\omega}{2k}}\right)+\right.$

$$\left.+\frac{\omega}{\pi}\int_0^{\infty}e^{-\rho t}\sin x\sqrt{\frac{\rho}{k}}\frac{d\rho}{\rho^2+\omega^2}\right].$$

823. $u(x,\ t)=\frac{x}{2\sqrt{\pi k}}\int_0^t\varphi(\tau)\frac{e^{-\frac{x^2}{4k(t-\tau)}}}{(t-\tau)^{3/2}}\,d\tau.$

824. Eq. dif. $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $0\leqslant x\leqslant l$, $t>0$,

$u\,|_{t=0}=u_0$, $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=0$, $u\,|_{x=l}=u_1$,

$$u(x,\ t)=u_1+\frac{4(u_1-u_0)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}e^{-a^2\left(n-\frac{1}{2}\right)^2\frac{\pi^2}{l^2}t}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2l}.$$

825. Eq. dif. $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $x>0$, $t>0$,

$u\,|_{t=0}=u_0$, $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=hu\,|_{x=0}$, $h=\text{const}$.

$$u(x,\ t)=u_0\left[\operatorname{erf}\frac{x}{2a\sqrt{t}}+e^{hx+h^2a^2t}\operatorname{Erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}+ha\sqrt{t}\right)\right].$$

Pour résoudre le problème, utiliser le théorème d'Efros (cf. § 14),

826. Eq. dif. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $0\leqslant x\leqslant l$, $t>0$,

$$u\,|_{t=0}=0,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0,\quad u(0,\ t)=0,\quad \frac{\partial u(l,\ t)}{\partial x}=\frac{F}{E},$$

$$u(x,\ t)=\frac{Fx}{E}-\frac{8Fl}{\pi^2 E}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}\cos\frac{(2k+1)\pi ct}{2l}}{(2k+1)^2}.$$

827. Eq. dif. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{g}{c^2}$, $0\leqslant x\leqslant l$, $t>0$,

$$u\,|_{t=0}=0,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0,\quad u(0,\ t)=0,\quad \frac{\partial u(l,\ t)}{\partial x}=0,$$

$$u(x,\ t)=\frac{gx(2l-x)}{2c^2}-$$

$$-\frac{16gl^2}{\pi^3c^2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\cos\frac{(2k+1)(x-l)\pi}{2l}\cos\frac{(2k+1)\pi ct}{2l}}{(2k+1)^3}.$$

828. $u(x,\ t)=-\frac{bx}{12}(x^3-2lx^2+l^3)+$

$$+\frac{8bl^4}{\pi^5}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{(2k+1)\pi t}{l}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{l}}{(2k+1)^5}.$$

829. Eq. dif. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $0\leqslant x\leqslant l$, $t>0$,

$$u(x,\ 0)=\frac{4hx(l-x)}{l^2},\quad \frac{\partial u(x,\ 0)}{\partial t}=0,\quad u(0,\ t)=u(l,\ t)=0,$$

$$u(x,\ t)=\frac{32h}{\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{(2k+1)\pi at}{l}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{l}}{(2k+1)^3}.$$

830. $\frac{1}{1-e^{-p}}$. 831. $\frac{e^{-p}}{(1-e^{-p})^2}$. 832. $\frac{1}{1-e^{\alpha-p}}$.

833. $\frac{e^p}{e^p-\alpha}$. 834. $\frac{e^p(e^p-\cos 1)}{e^{2p}+2e^p\cos 1+1}$.

835. $\frac{e^p\sin\alpha}{e^{2p}-2e^p\cos\alpha+1}$. 836. $\frac{e^p\operatorname{sh}1}{e^{2p}-2e^p\operatorname{ch}1+1}$.

837. $\frac{e^p}{e^p-e}-\frac{2e^p}{e^p-\sqrt{e}}$. 838. $\frac{1}{2}\frac{e^p}{e^p-1}+\frac{1}{2}\frac{e^p(e^p-\cos 2)}{e^{2p}-2e^p\cos 2+1}$.

839. $\dfrac{e^{(1-k)p}}{e^p-1}$. 840. $\left(\dfrac{e^p}{e^p-e^3}-1-e^{\alpha-p}-e^{2\alpha-p}\right)e^{3p}$.

841. $\dfrac{e^p(2\operatorname{ch}2-e^p)\operatorname{sh}2}{e^{2p}-2e^p\operatorname{ch}2+1}$. 842. $\dfrac{e^p(4e^{2p}-3e^p+1)}{(e^p-1)^3}$.

843. $\dfrac{e^{p-1}\sin 2}{e^{2p}-2e^{p-1}\cos 2+e^{-2}}$. 844. $\dfrac{e^{p+2}(e^p+e^2)}{(e^p-e^2)^3}$.

845. $\dfrac{e^p(e^p-e^3\operatorname{ch}1)}{e^{2p}-2e^{p+3}\operatorname{ch}1+e^6}$. 846. $\dfrac{e^{p+1}(e^p+e)}{(e^p-e)^3}$.

847. $\dfrac{e^p(e^p+1)}{(e^p-1)^3}$. 848. $\dfrac{(e^{2p}-1)e^p}{(e^{2p}+1)^2}$. 849. $\ln a+\ln\dfrac{e^p-1}{e^p-a}$.

850. $\alpha+\operatorname{Arctg}\dfrac{\sin\alpha}{e^p-\cos\alpha}$. 851. $\ln\dfrac{\sqrt{e^{2p}-2e^p\cos\alpha+1}}{e^p-1}$.

852. $\dfrac{1}{e^p-1}-\ln\sqrt{\dfrac{e^p-e^{-1}}{e^p-e}}$. 853. $\dfrac{e^p[(1+e^{2p})\cos\alpha-2e^p]}{(e^{2p}-2e^p\cos\alpha+1)^2}$.

854. $\dfrac{e^p(e^{4p}+2e^{3p}\operatorname{ch}\alpha-6e^{2p}+2e^p\operatorname{ch}\alpha+1)\operatorname{sh}\alpha}{(e^{2p}-2e^p\operatorname{ch}\alpha+1)^3}$.

855. $\dfrac{e^p(2e^{3p}-5e^{2p}\operatorname{ch}\alpha+4e^p\operatorname{ch}^2\alpha-\operatorname{ch}\alpha)}{(e^{2p}-2e^p\operatorname{ch}\alpha+1)^2}$.

856. $\varepsilon-\varepsilon_0+\ln\dfrac{e^p-e^{\varepsilon_0}}{e^p-e^{\varepsilon}}$. 857. $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{e^{2p}-2e^p\operatorname{ch}1+1}{e^{2p}-2e^p\operatorname{ch}\varepsilon+1}$.

858. $\varepsilon+\operatorname{Arctg}\dfrac{\sin\varepsilon}{e^p-\cos\varepsilon}$.

859. $\varepsilon-1+\dfrac{1}{2}\left(\operatorname{Arctg}\dfrac{\sin 2\varepsilon}{e^p-\cos 2\varepsilon}-\operatorname{Arctg}\dfrac{\sin 2}{e^p-\cos 2}\right)$. 860. $\dfrac{1-e^n}{1-e}$.

861. $\dfrac{n(n+1)}{2}$. 862. $\dfrac{n}{1-e}-\dfrac{1-e^n}{(1-e)^2}$. 863. $\dfrac{1-e^{2(n-1)}}{1-e^2}$.

864. $\Delta f(n)=3,\quad \Delta^k f(n)=0\quad (k=2, 3, 4, \ldots)$.

865. $\Delta^k f(n)=(e^4-e^2)^k\quad (k=1, 2, 3, \ldots)$.

866. $\Delta f(n)=2n,\quad \Delta^2 f(n)=2,\quad \Delta^k f(n)=0\quad (k=3, 4, \ldots)$.

867. $\dfrac{e^p(e^{2p}+4e^p+1)}{(e^p-1)^4}$. 868. $\dfrac{e^p}{(e^p-1)^3}$. 869. $\dfrac{2e^{(1-k)p}}{(e^p-1)^3}$.

870. $\dfrac{n(n-1)(2n-1)}{6}$. 871. $\dfrac{(n-1)\sin\dfrac{2n-1}{2}}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}-\dfrac{\sin^2\dfrac{n-1}{2}\alpha}{2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}$.

872. $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3}$.

873. $\dfrac{(1-e\cos\alpha)(1-e^n\cos n\alpha)+e^{n+1}\sin\alpha\sin n\alpha}{e^2-2e\cos\alpha+1}$. 874. $n3^{n-1}$.

875. $\dfrac{5^n-3^n}{3}$. 876. $\sin\dfrac{n\pi}{2}$. 877. $\dfrac{1+(-1)^n}{4}-\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{n+1}{2}\pi$.

878. $a^{n-1}2^{n/2}\sin\frac{3n\pi}{4}$. 879. $\frac{n(n-1)}{2}e^{n-2}$.

880. Equation d'ordre 2. 881. Equation d'ordre 0.

882. Equation d'ordre 1. 883. Equation d'ordre 3. 884. 2^n.

885. $(-1)^n(1-n)$. 886. $2^{n/2}\sin\frac{n\pi}{4}$. 887. $1-2^{n/2}\cos\frac{n\pi}{4}$.

888. $\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{(n-1)\pi}{4}$. 889. $(-1)^n\frac{n^2-n}{2}$.

890. $\frac{3n-1+(-2)^n}{9}$. 891. $\frac{4^{n-1}+15\cdot 2^{n-3}-7(-2)^{n-3}}{3}$.

892. $\frac{1-(-1)^n}{2}$. 893. $\frac{n(n-1)(n-2)}{2}\cdot 3^{n-3}$.

894. $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\cdot(-1)^{n-1}$. 895. $\frac{n^5}{60}-\frac{n^4}{8}+\frac{n^3}{3}-\frac{3n^2}{8}+\frac{3n}{20}$.

896. Asymptotiquement stable. 897. Asymptotiquement stable.
898. Instable. 899. Instable.
900. Stable mais pas asymptotiquement.
901. Asymptotiquement stable. 902. Instable.
903. Foyer instable. 904. Centre. 905. Foyer stable.
906. Selle. 907. Nœud instable. 908. Nœud instable.
909. Nœud stable. 910. Le point (0, 0, 0) est stable.
911. Le point (0, 0, 0) est instable.

912. Asymptotiquement stable pour $\alpha < 0$. Dans tous les autres cas, la solution nulle est instable.

913. Asymptotiquement stable pour $\alpha < 0$ et pour $\alpha > 1$; stable mais pas asymptotiquement pour $\alpha = 0$ et pour $\alpha = 1$; instable pour $0 < \alpha < 1$.

914. Instable pour tout α. 915. $\alpha \leqslant 0$. 916. $\alpha \leqslant -1/2$.

917. Asymptotiquement stable pour $\alpha\beta < 1$; stable mais pas asymptotiquement pour $\alpha\beta = 1$.

918. Asymptotiquement stable pour $\beta < \alpha^2$ $(\alpha < 0)$; stable mais pas asymptotiquement pour: 1) $\alpha = 0$ $(\beta < 0)$; 2) $\beta = \alpha^2$ $(\alpha < 0)$.

919. Asymptotiquement stable pour $\alpha^2+\beta^2-2\alpha > 0$ $(\alpha < 1)$; stable mais pas asymptotiquement pour: 1) $\alpha = 1$ $(|\beta| > 1)$; 2) $\alpha^2+\beta^2-2\alpha = 0$ $(0 \leqslant \alpha < 1)$.

920. Instable pour toutes les valeurs de α et de β.

921. Asymptotiquement stable pour $\alpha^2+\beta^2-\beta < 0$; stable mais pas asymptotiquement pour $\alpha^2+\beta^2-\beta = 0$ $(\alpha \neq 0,\ \beta \neq 0)$.

922. Stable mais pas asymptotiquement pour $\beta + 2\alpha + 1 = 0$; asymptotiquement stable pour toutes les autres valeurs de α et de β.

923. Asymptotiquement stable. 924. Asymptotiquement stable.
925. Asymptotiquement stable. 926. Stable.
927. Asymptotiquement stable. 928. Asymptotiquement stable.
929. Asymptotiquement stable. 930. Instable.
931. Instable. 932. Asymptotiquement stable.
933. Asymptotiquement stable. 934. Asymptotiquement stable.
935. Instable. 936. Stable. 937. Instable.
938. Stable. 939. Instable. 940. Instable.
941. Asymptotiquement stable. 942. Stable.

943. L'étude selon la première approximation n'est pas possible. A l'aide de la fonction de Liapounov, on établit que le point (0, 0) est asymptotiquement stable.

944. Le point de repos est stable. **945.** La solution nulle du système de la première approximation est instable, alors que pour le système tout entier, elle est asymptotiquement stable.

946. Si $a > 0$, $b > 0$, la condition de stabilité prend la forme $\cos T > 0$, où $T = (-1)^k x_0 + k\pi$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, $x_0 = \operatorname{Arcsin} \frac{L}{b}$.

954. Stable. **955.** Instable. **956.** Stable.

957. Instable. **958.** Pour $\alpha > 1/2$.

959. La solution est instable pour tout α. **960.** Pour $\alpha > 13/6$.

961. Pour toutes les valeurs de (α, β) situées dans le domaine G (cf. fig.).

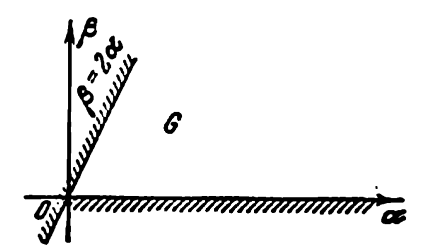


Fig. concernant n° 961.

Fig. concernant n° 962.

962. Pour toutes les valeurs de (α, β) situées dans le domaine G: $\alpha\beta > 3$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ (cf. fig.).

963. La solution est instable pour toutes les valeurs de (α, β). **964.** $p > 0$, $q > 2$.

965. Toutes les racines situées dans le demi-plan gauche; la solution est stable (cf. fig.).

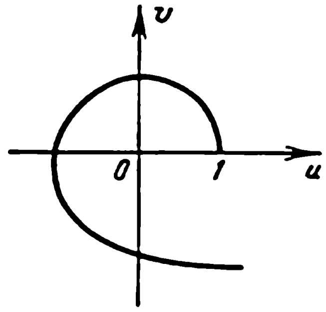


Fig. concernant n° 965.

Fig. concernant n° 966.

966. Deux racines dans le demi-plan gauche et deux racines dans celui droit; la solution est instable (cf. fig.).

967. Stable. **968.** Stable.

969. Deux racines dans le demi-plan droit; la solution est instable (cf. fig.).

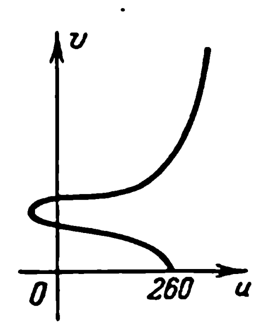


Fig. concernant n° 969.

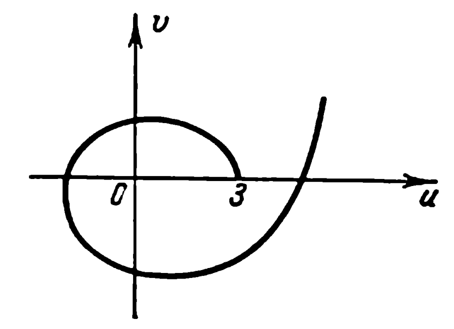


Fig. concernant n° 970.

970. Stable (cf. fig.). 971. Stable. 972. Stable.
973. Stable. 974. La solution est stable. 975. Stable.
976. Stable. 977. Stable. 978. Stable.
979. Stable (cf. fig.). 980. Stable.
981. Racines purement imaginaires; la solution n'est pas stable (cf. fig.).

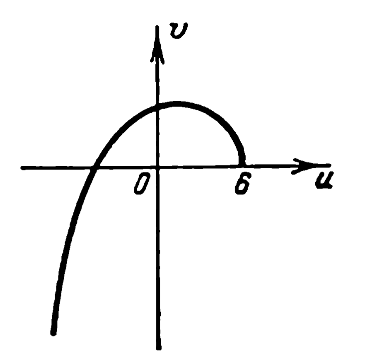


Fig. concernant n° 979.

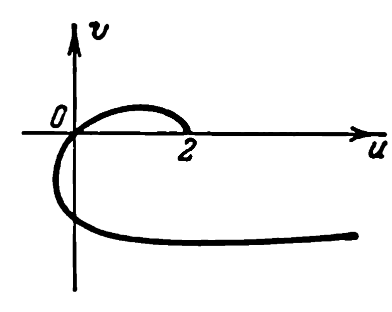


Fig. concernant n° 981.

982. Deux racines dans le demi-plan droit; la solution est instable.
983. Deux racines dans le demi-plan droit; la solution est instable (cf. fig.).
984. Deux racines dans le demi-plan droit; la solution est instable.

985.

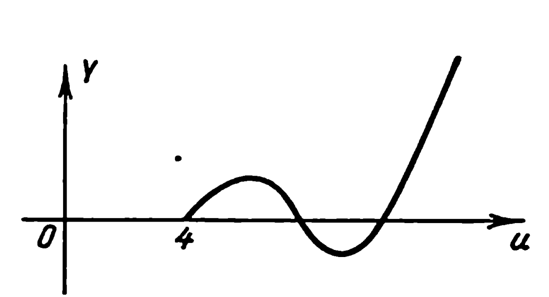


Fig. concernant n° 983.

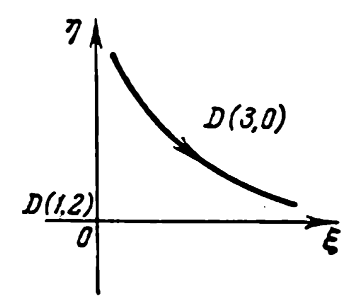


Fig. concernant n° 985.

986.

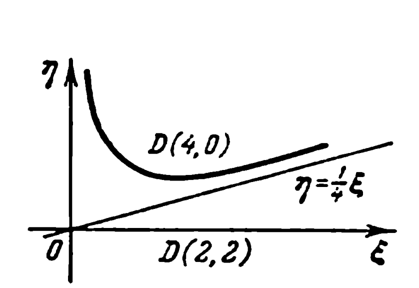


Fig. concernant n° 986.

987.

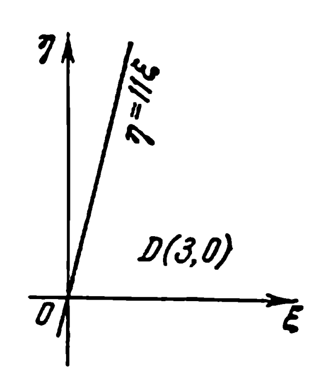


Fig. concernant n° 987.

BeatriceGloria_personal library

988.

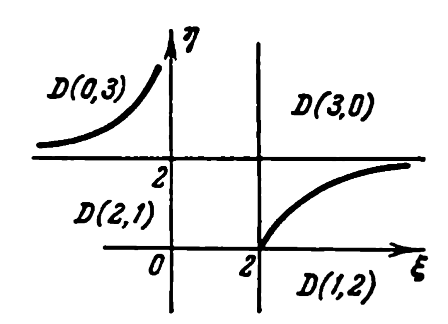


Fig. concernant n° 988.

989.

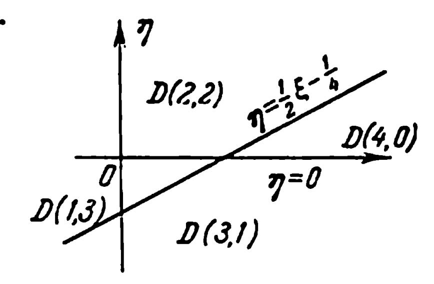


Fig. concernant n° 989.

990.

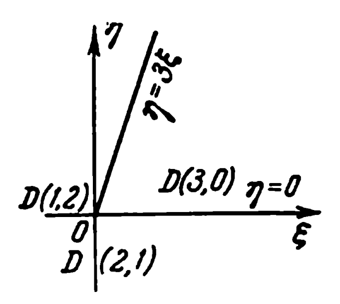


Fig. concernant n° 990.

991.

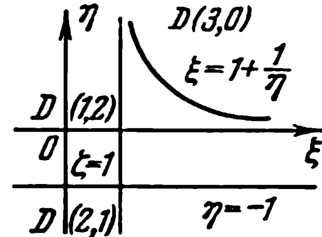
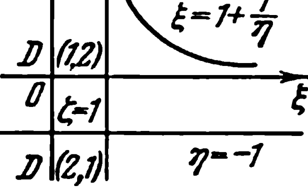



Fig. concernant n° 991.

992.

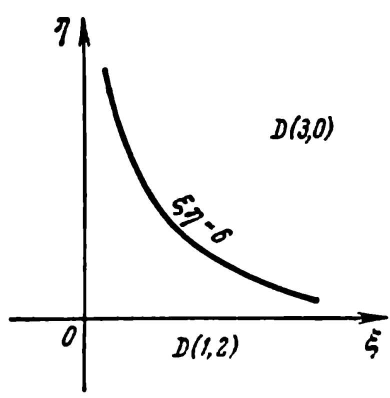


Fig. concernant n° 992.

993.

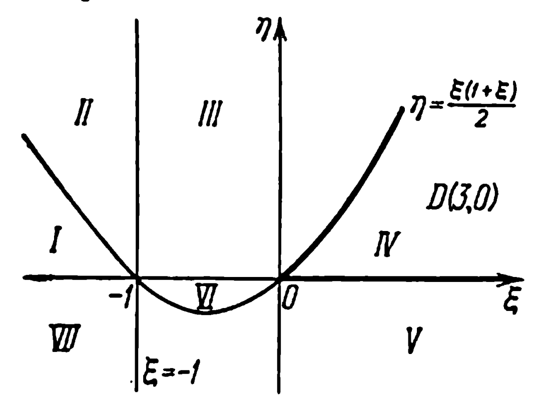


Fig. concernant n° 993.

994.

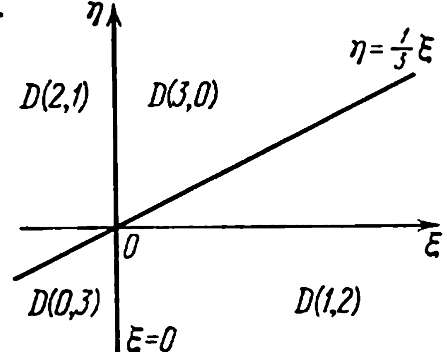


Fig. concernant n° 994.

995.

Fig. concernant n° 995.

996. 997.

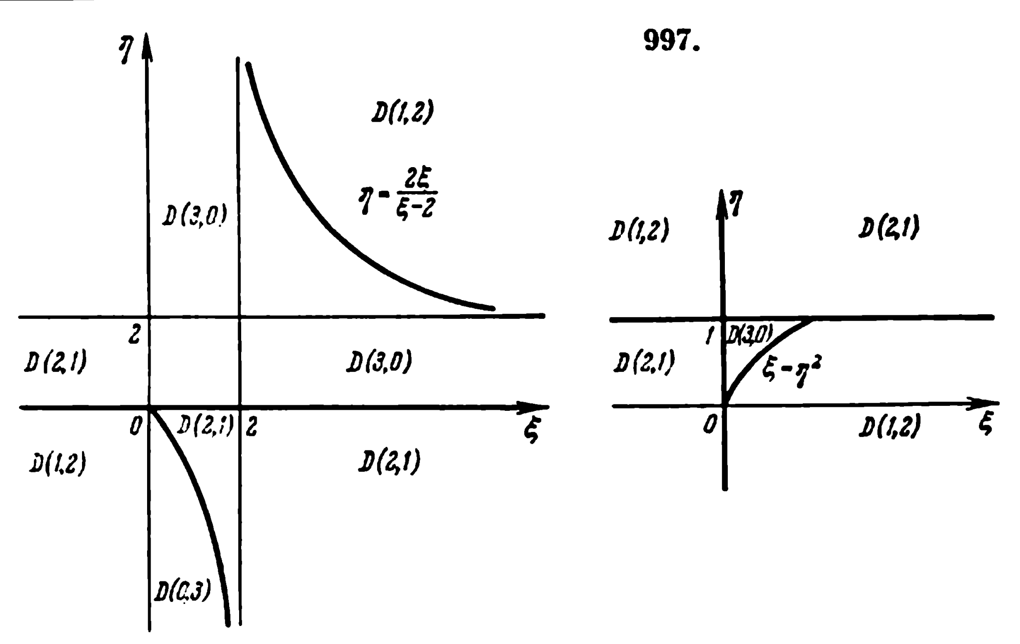


Fig. concernant n° 996. Fig. concernant n° 997.

998. $f(n)=C_1\cdot 2^n+C_2\left(-\frac{4}{5}\right)^n$. 999. $f(n)=(-1)^n(4n^2-7n+1)$.

1000. $f(n)=\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^n\left[C_1\cos\left(n\operatorname{Arctg}\frac{1}{2}\right)+C_2\sin\left(n\operatorname{Arctg}\frac{1}{2}\right)\right]$.

1001. $f(n)=2^n\left(C_1+C_2\cos\frac{2n\pi}{3}+C_3\sin\frac{2n\pi}{3}\right)$.

1002. $f(n)=(-1)^n(C_1+C_2n)+2^{n/2}\left(C_3\cos\frac{n\pi}{4}+C_4\sin\frac{n\pi}{4}\right)$.

1003. $f(n)=C_1(1-\sqrt{2})^n+C_2(1+\sqrt{2})^n-\frac{n}{2}$.

1004. $f(n)=2\cdot 3^n+(-1)^n(8n-2)$.

1005. $f(n)=\frac{1}{2}\operatorname{tg}2\cdot\cos\frac{n\pi}{2}+\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{\sin 2(n-1)}{2\cos 2}$.

1006. $f(n)=C_1+C_2n+C_3n^2+\frac{e^n}{(e-1)^3}$.

1007. $f(n)=2^n\left(\frac{1}{16}+C_1\cos\frac{n\pi}{3}+C_2\sin\frac{n\pi}{3}\right)+C_3(-2)^n$.

1008. Asymptotiquement stable. 1009. Stable mais pas asymptotiquement.

1010. Asymptotiquement stable. 1011. Instable.

1012. $a_0+a_1+a_2+a_3>0$, $a_0-a_1+a_2-a_3>0$, $3(a_0-a_3)+a_1-a_2>0$, $3(a_0+a_3)-a_1-a_2>0$, $a_0^2-a_3^2-a_0a_2+a_1a_3>0$.

1013. $1-q>0$, $1+p+q>0$, $1-p+q>0$.

1014. $-1<p<1$. 1015. $|a|>b$.

1016. Asymptotiquement stable. 1017. Instable.

1018. Asymptotiquement stable. 1019. Instable.

1020. Instable. 1021. Instable. 1022. Instable.

ANNEXE

DICTIONNAIRE D'IMAGES DES PRINCIPAUX ORIGINAUX

n°d'ordre	Original $f(t)$	Image $F(p)=\int_0^\infty f(t)\,e^{-pt}\,dt$
1	1	$\frac{1}{p}$
2	$t^n\ (n=1,\ 2,\ \ldots)$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
3	$t^\alpha(\alpha>-1)$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$
4	$e^{\lambda t}(\lambda=a+bi)$	$\frac{1}{p-\lambda}$
5	$t^n e^{\lambda t}$	$\frac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}}$
6	$t^\alpha e^{\lambda t}\ (\alpha>-1)$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(p-\lambda)^{\alpha+1}}$
7	$\sin\omega t\ (\omega>0)$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
8	$\cos\omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
9	$\operatorname{sh}\omega t$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$
10	$\operatorname{ch}\omega t$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$
11	$e^{\lambda t}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(p-\lambda)^2+\omega^2}$
12	$e^{\lambda t}\cos\omega t$	$\frac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2+\omega^2}$
13	$e^{\lambda t}\operatorname{sh}\omega t$	$\frac{\omega}{(p-\lambda)^2-\omega^2}$

Suite

nod'ordre	Original $f(t)$	Image $F(p)=\int_0^\infty f(t)\,e^{-pt}\,dt$
14	$e^{\lambda t}\,\mathrm{ch}\,\omega t$	$\frac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2-\omega^2}$
15	$t\sin\omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$
16	$t\cos\omega t$	$\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
17	$t\,\mathrm{sh}\,\omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2-\omega^2)^2}$
18	$t\,\mathrm{ch}\,\omega t$	$\frac{p^2+\omega^2}{(p^2-\omega^2)^2}$
19	$\sin(t-\tau)\ (\tau>0)$	$\frac{e^{-\tau p}}{p^2+1}$
20	$\cos(t-\tau)$	$\frac{pe^{-\tau p}}{p^2+1}$
21	$t^n\sin\omega t$	$\frac{\mathrm{Im}\,(p+i\omega)^{n+1}}{(p^2+\omega^2)^{n+1}}\,n!$
22	$t^n\cos\omega t$	$\frac{\mathrm{Re}\,(p+i\omega)^{n+1}}{(p^2+\omega^2)^{n+1}}\,n!$
23	$J_n(t)\ (n=1,\ 2,\ \dots)$	$\frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^n}{\sqrt{p^2+1}}$
24	$\mathrm{Erf}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\alpha/2\sqrt{t}}^{\infty}e^{-x^2}dx$	$\frac{1}{p}\,e^{-\alpha\sqrt{p}}$
25	$\mathrm{Si}\,t=\int_0^t\frac{\sin x}{x}\,dx$	$\frac{\mathrm{Arccotg}\,p}{p}$
26	$\mathrm{Ci}\,t=-\int_t^\infty\frac{\cos x}{x}\,dx$	$\frac{1}{p}\ln\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}$
27	$\frac{e^{bt}-e^{at}}{t}$	$\ln\frac{p-a}{p-b}$
28	$\frac{I_n(\alpha t)}{t}\ (\alpha>0)$	$\frac{1}{n\alpha^n}\,(\sqrt{p^2+\alpha^2}-p)^n$
29	$\ln t$	$\frac{1}{p}\left(\ln\frac{1}{p}-\gamma\right),\ \gamma=0{,}57722\dots$

BIBLIOGRAPHIE

1. АРАМАНОВИЧ И. Г., ЛУНЦ Г. Л., ЭЛЬСГОЛЬЦ Л. Э. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости [ARAMANOVITCH I., LOUNTZ G., ELSGOLTZ L. Fonctions d'une variable complexe. Calcul opérationnel. Théorie de la stabilité]. M., Наука, 1968.
2. ЕВГРАФОВ М. А. Аналитические функции [EVGRAFOV M. Fonctions analytiques]. M., Наука, 1965.
3. ЕВГРАФОВ М. А., СИДОРОВ Ю. В., ФЕДОРЮК М. В., ШАБУНИН М. И., БЕЖАНОВ К. А. Сборник задач по теории аналитических функций [EVGRAFOV M., SIDOROV Y., FÉDORUK M., CHABOUNINE M., BÉJANOV K. Recueil de problèmes sur la théorie des fonctions analytiques]. M., Наука, 1969.
4. CARSLAW H., JAEGER J. Operational Methods in Applied Mathematics. London, 1943.
5. LAVRENTIEV M., CHABAT B. Méthodes de la théorie des fonctions d'une variable complexe. M., Наука, 1972.
6. МАРКУШЕВИЧ А. И., МАРКУШЕВИЧ Л. А. Введение в теорию аналитических функций [MARKOUCHÉVITCH A., MARKOUCHÉVITCH L. Introduction à la théorie des fonctions analytiques]. M., Просвещение, 1977.
7. МЫШКИС А. Д. Математика для втузов (специальные курсы) [MYCHKIS A. Mathématiques à l'usage des étudiants des établissements de l'enseignement supérieur technique (cours spéciaux)]. M., Наука, 1971.
8. СВЕШНИКОВ А. Г., ТИХОНОВ А. Н. Теория функций комплексной переменной [Svechnikov A., Tikhonov A. Théorie des fonctions d'une variable complexe]. M., Наука, 1979.
9. СИДОРОВ Ю. В., ФЕДОРЮК М. В., ШАБУНИН М. И. Лекции по теории функций комплексного переменного [Sidorov Y., Fédoruk M., Chabounine M. Cours de théorie des fonctions d'une variable complexe]. M., Наука, 1976.
10. ЭЛЬСГОЛЬЦ Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление [Elsgoltz L. Equations différentielles et calcul variationnel]. M., Наука, 1965.

TABLE DES MATIÈRES

